פתרונות לשאלות מבחינות עתיקות

בחדו"א 2א

שלומי

פתרונות רבים בקורסים אחרים נמצאים באתר שלי

www.shlomiru.com

www.shlomir.com

שאלה: (מבחינה משותפת של פרופ' אהרונסון ופרופ' שוס)

מצא כל (α,β) שעבורם קיים גבול סופי

$$a=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\alpha}(1+\sin^2 x)^{\beta}}{x^2+y^2}\,dx$$

ומצא אותו

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\alpha}(1+\sin^2 x)^{\beta}}{x^2+y^2}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\alpha-2}(1+\sin^2 x)^{\beta}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx\overset{\text{החלפת משתנים}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}(1+\sin^2(yt))^{\beta}}{t^2+1}\,dt$$

נסתכל על $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+\sin^2(ty))^{\beta}}{t^2+1}\,dt$. עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $0<M<\infty$

(M פונקציה של ε) כך ש: $1-\varepsilon\le\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{dt}{t^2+1}\le 1$

ו: $0<\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-M}\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{\pi}\int_{M}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}<\varepsilon$. מכיון שבקטע הסגור $[-M,M]$

$(1+\sin^2(ty))^{\beta}$ שואף ל 1 במידה שווה כאשר y שואף לאפס

אז $1-\varepsilon\le\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{+M}\frac{(1+\sin^2(ty))^{\beta}}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{+M}\frac{dt}{t^2+1}\le 1$,

מכיון שהפונקציה הרציפה $(1+\sin^2(ty))^{\beta}$ מקבלת ערכים שבין 0 ל $2^{|\beta|}$,

אז שני האינטגרלים שמחוץ לקטע $[-M,M]$ אינם גדולים מ $\varepsilon\cdot 2^{|\beta|}$.

מכיון שניתן למצוא M מתאים לכל $\varepsilon>0$ נקבל:

$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+\sin^2(ty))^{\beta}}{t^2+1}\,dt=1$ ומתקיים: הגבול הוא 1 עבור $\alpha=1$,

0 עבור $\alpha>1$ ו ∞ עבור $\alpha<1$.

שלומי

שאלה: (מבחנה משותפת של פרופ' שוס ופרופ' אהרונסון)

חשב שטח הפנים ונפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב חצי העיגול $x^2+(y-1)^2\le 1$ $1\le y$ סביב ציר x.

פתרון מקוצר:

הצורה המתקבלת היא גוף שבו חסר גליל פנימי.

$$\text{נפח} = \pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}1^2dx=$$

$$=\pi\left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx+2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

מתקיים:

$$\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\pi\cdot\frac{4}{3}$$

$$2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{\substack{\text{הצבה}\\ \sin t=x}}{=}2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2t\,dt\overset{\text{סימטריה}}{=}2\pi\cdot 0.5\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2t+\sin^2t\,dt$$

$$=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi^2$$

ולסכום הנפח הוא $\frac{4}{3}\pi+\pi^2$

$$\text{שטח פני הגליל הפנימי}=\int_{-1}^{1}2\pi\cdot 1\,dx=4\pi$$

$$\text{שטח פני החלק החיצוני}=\int_{-1}^{1}2\pi\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)dx=\cdots=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt+4\pi=\pi^2+4\pi$$

ובסכום שטח הפנים הוא $\pi^2+8\pi$.

שלומי

שאלה מבחינה אמריקאית של פרופ' אהרונסון ופרופ' שוס

בכל אחד מארבעת הסעיפים רשומות ארבע טענות.
לגבי כל טענה יש לקבוע אם היא נכונה או לא נכונה.
יכולות להיות מספר טענות נכונות בכל סעיף.

---

1. תהי $\varphi_n(x)$ סדרת פונקציות חסומות על הישר הממשי המתכנסת נקודתית לפונקציה $\varphi(x)$ על הישר הממשי.

א. $\varphi(x)$ בהכרח חסומה על כל קטע סופי אך לא על כל הישר הממשי.

ב. $\varphi(x)$ בהכרח חסומה על כל הישר הממשי.

ג. $\varphi(x)$ לא בהכרח חסומה בקטע כלשהו.

ד. בהכרח קיים קטע שבו $\varphi(x)$ חסומה וקטע שבו אינה חסומה.

---

2. א. קיימת סידרה של פונקציות רציפות המתכנסת במידה לא שווה על הישר לפונקציה רציפה.

ב. כל פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ היא גבול של סדרת פונקציות מדרגות המתכנסת במידה שווה ב-$[0,1]$. (פונקצית מדרגות היא פונקציה קבועה קטעים).

ג. קיימת סדרת פונקציות אינטגרביליות המתכנסת במידה שווה לפונקציה לא אינטגרבילית.

ד. קיימת סדרה של פונקציות לא רציפות המתכנסת במידה שווה לפונקציה רציפה.

---

3. תהי $\varphi_n(x)$ סדרת פונקציות חסומות המתכנסת במידה שווה על הישר הממשי לפונקציה $\varphi(x)$.

א. $\varphi(x)$ בהכרח חסומה על כל קטע סופי אך לא על כל הישר הממשי.

ב. $\varphi(x)$ בהכרח חסומה על הישר הממשי.

ג. $\varphi(x)$ לא בהכרח חסומה בקטע כלשהו.

ד. בהכרח קיים קטע שבו $\varphi(x)$ חסומה וקטע שבו אינה חסומה.

---

4. תהי $\varphi_n(x)$ סדרת פונקציות רציפות ב- $[0,1]$ המתכנסת נקודתית לפונקציה $\varphi(x)$ ב- $[0,1]$.

א. בהכרח $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)dx=\int_0^1 \varphi(x)dx$.

ב. אם נתון $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)dx=\int_0^1 \varphi(x)dx$

אזי בהכרח קיים $0<x<1$ $(x\neq 0, x\neq 1)$ כך ש-

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \varphi_n(t)dt=\int_0^x \varphi(t)dt$$

ג. בנתוני (ב) השוויון בהכרח נכון לכל $0\leq x\leq 1$.

ד. אם ההתכנסות של $\varphi_n(x)$ ל- $\varphi(x)$ היא במידה שווה ב- $[0,1]$ אזי

$\int_0^x \varphi_n(t)dt \longrightarrow \int_0^x \varphi(t)dt$ במידה שווה ב- $0\leq x\leq 1$.

הטענות הנכונות הן:

1. ג

2. א , 2. ב , 2. ג

3. ב

4. ג

הסברים מקוצרים

סעיף 1

נגדיר סדרת פונקציות $\varphi_n(x)$:

$\varphi_n(x)=0$ עבור כל x אי-רציונלי.

עבור רציונלי $\frac{p}{q}$ (כך ש p ו q זרים),

$\varphi_n(x)=0$ אם $n<q$ ו $\varphi_n(x)=q$ עבור $n\geq q$.

מתקיים $|\varphi_n(x)|\leq n$ לכן כל פונקציה $\varphi_n(x)$ הינה חסומה.

עבור רציונלי $\frac{p}{q}$ הערך של הפונקציה הגבולית הוא q. עבור כל m קיים בכל קטע רציונלי $\frac{p}{q}$ שעבורו $q\geq m$ (נימוק אפשרי לכך הוא שאחרת היה רק מספר סופי של רציונלים בקטע כי עבור כל q קיים יש רק מספר מוגבל של p אפשריים).

לכן עבור כל m קיימת בכל קטע נקודה שבה הגבול של סדרת הפונקציות גדול מ m.

סעיף 2

דוגמא לא': סדרת פונקציות $f_n(x)$ כך ש:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & x\leq n \\ x-n & n<x\leq n+1 \\ 1 & n+1<x \end{cases}$$

הגבול של סדרת הפונקציות הוא אפס, הפונקציות רציפות.
עבור כל n קיים X כך ש $f_n(x)=1$.

<u>דוגמא לד'</u>: פונקציה רציפה מקבלת בקטע ערך מינימלי m וערך מקסימלי M. נגדיר סדרת פונקציות $f_n(x)$: עבור כל n $f_n(x)$ מקבלת את קרובת הערכים שהם מכפלות של $\frac{1}{n}$ במספרים טבעיים.
$f_n(x)$ תקבל את הערך מבין אלה שהוא המקסימלי הקטן מ: $f(x)$. זאת אומרת: $f_n(x)=\lfloor n\cdot f(x)\rfloor/n$
כאשר $\lfloor a\rfloor$ הוא החלק השלם של a.
מכיוון ש $f(x)$ רציפה אז אם קיים i כך ש $i\cdot\frac{1}{n}<f(x)<(i+1)\cdot\frac{1}{n}$ אז קיימת סביבה של x כך שעבור כל t בסביבה זאת מתקיים
$i\cdot\frac{1}{n}<f(t)<(i+1)\cdot\frac{1}{n}$. בנוסף מתקיים עבור כל x: $\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0$.

<u>הטענה שבסעיף ג' אינה נכונה לגבי אינטגרל רימן.</u>
אם עבור כל $\varepsilon>0$, סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה אז קיים N כך שעבור כל $N<n$:
$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ כך שלגבי $f(x)$: חסם עליון להפרש בין הסכום העליון לסכום התחתון הוא הפרש זה לגבי $f_n(x)$ ועוד ε כפול אורך הקטע.

<u>דוגמא לסעיף ג'</u>: נגדיר סדרת פונקציות $f_n(x)$ כך:

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x \text{ אי רציונלי}\\ \frac{1}{n} & x \text{ רציונלי}\end{cases}$$

כל פונקציה הוא לא רציפה אך מתקיים עבור כל x: $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

שלומי

סעיף 3

מכיון שסדרת הפונקציות שואפת במידה שווה ל $f(x)$ אז קיים n כך ש $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. מכיון ש $f_n(x)$ חסומה אז קיים M_n סופי כך ש $|f_n(x)| \le M_n$. לכן קיים $|f_n(x)| \le M_n+\varepsilon$.

סעיף 4

נתן דוגמא שתפריך את א, ב, ג.

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} -1+nx & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1-\frac{1}{n} \\ n(1-x) & 1-\frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

מתקיים:

$$\varphi(x)=\begin{cases} -1 & x=0 \\ 0 & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

הסדרה היא סדרת פונקציות רציפות

מתקיים עבור כל $0<x<1$: $\int_0^x \varphi(t)\,dt=0$

אך $\int_0^x \varphi_n(t)\,dt \neq 0$.

הבהרה לטענה ג: אם $\varphi_n(x)$ שואף במידה שווה ל $\varphi(x)$ אז עבור ε נתון: קיים N כך שעבור כל $N<n$ ועבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים:

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \varepsilon$$

ולכן

$$\left|\int_0^x \varphi_n(t)\,dt-\int_0^x \varphi(t)\,dt\right| \le \varepsilon\cdot x \le \varepsilon$$

שלומי

שאלות שלקוחות ממבחן אמריקאי ישן של פרופ' י. אהרונסון

שאלה 1

הערכים של האינטגרלים הבאים (בינהם אינטגרלים לא אמיתיים שמתכנסים) הינם מספרים שלמים. עליך לחשב את הערכים האלה.

א. $\left(18/\ln\left(\frac{7}{4}\right)\right)\cdot\int_2^3 \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$

ב. $\frac{2}{\pi}\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

ג. $9\cdot\sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{(\cos x)^4}$

ד. $\left(30\cdot\sqrt{3}/\pi\right)\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+3\cdot e^{-x}}$

ה. $15\cdot\int_0^3 x\cdot\sqrt{1+x}\,dx$

שאלה 2

עליך לבדוק את ההתנהגות של כל אחד מהטורים הבאים (מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, מתבדר)

א. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n/n\cdot\sqrt{\ln(n)}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^{\frac{1}{\ln(n)}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)/(n!)^{\frac{1}{n}}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{3n}{n}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^n$

ז. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

ח. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1-(-1)^{n+1}}{n}$

שאלה 3

בשאלה זאת, רשימה של טענות. עליך לציין איזה מן הטענות נכונות ואיזה מן הטענות אינן נכונות.

יהיו $f_n(x)=\frac{n\cdot x^2}{1+n\cdot x^2}$ עבור $n\in N$

א. $f_n\to 1$ במידה שווה על $[-1,1]$.

ב. $f_n\to 1$ נקודתית על $[-1,1]$.

ג. $f_n\to 1$ במידה שווה על $[1,\infty)$.

יהיו $u_n(x)=(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+n}\right)$ עבור $n\in N$

ד. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ מתכנס נקודתית על $[0,1]$.

ה. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס במידה שווה על R.

ו. אם $I=(a,b)$ קטע ו- $f=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס נקודתית על I, אזי f גזירה ברציפות על I.

יהיה עבור $0\le x\le 1$ $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[nx]/2^n$ כאשר $[y]=\max\{n\in Z: n\le y\}$

ז. הפונקציה g אינטגרבילית על $[0,1]$.

נסמן $C=\{x\in[0,1]: g(y)\xrightarrow[y\to x]{} g(x)\}$

ח. $C=[0,1]\cap Q$ ט. $C=[0,1]\setminus Q$ י. $C=[0,1]$

שאלה 4

גם בשאלה זאת עליך לציין איזה מהטענות הינן נכונות ואיזה אינן נכונות.

א. אם $a_n\in R$, $r>0$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ מתכנס עבור $|x|<r$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\cdot x^{2n}$ גם מתכנס עבור $|x|<r$.

ב. אם $f:[0,1]\to R$ פונקציה אינטגרבילית על $[0,1]$ ו- $g:R\to R$ פונקציה רציפה אזי $h(x)=g(f(x))$ הינה פונקציה אינטגרבילית על $[0,1]$.

ג. אם $f_n:R\to R$ פונקציות רציפות ולכל $x\in R$, $f_n(x)\ge f_{n+1}(x): n\in N$ ו- $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $x\in R$ אזי $f_n\to 0$ במידה שווה על R.

הסברים לפתרון המבחן

שאלה 1 :

א.

$$\left(18/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\int_2^3\frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}=\left(9/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\int_4^9\frac{dt}{t^2-t-2}=$$

$$=\left(9/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\int_4^9\frac{dt}{(t-0.5)^2-2.25}=\left(9/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\int_{3.5}^{8.5}\frac{dz}{z^2-2.25}=$$

$$=\left(3/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\left(\int_{3.5}^{8.5}\frac{dz}{z-1.5}-\int_{3.5}^{8.5}\frac{dz}{z+1.5}\right)=\left(3\cdot\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\Big[\ln(z-1.5)-\ln(z+1.5)\Big]_{3.5}^{8.5}$$

$$=\left(3/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\Big(\ln(7)-\ln(10)-\ln(2)+\ln(5)\Big)=\left(3/\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right)\cdot\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)=3$$

ב.

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}=\frac{2}{\pi}\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\frac{2}{\pi}\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2+1}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\Big[\arcsin(t)\Big]_{-1}^{1}=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2$$

ג. נציב

$$\frac{1}{\cos^2 x}=t^2+1\,,\quad dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx\ \Longleftarrow\ t=\tan x$$

$$9\cdot\sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{(\cos x)^4}=9\cdot\sqrt{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=9\cdot\sqrt{3}\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\dots=44$$

ד.

$$\left(30\cdot\sqrt{3}/\pi\right)\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+3\cdot e^{-x}}=\left(30\cdot\sqrt{3}/\pi\right)\cdot\int_1^\infty\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{t}\right)\cdot t}=$$

$$=\left(30\cdot\sqrt{3}/\pi\right)\cdot\int_1^\infty\frac{dt}{t^2+3}=\left(10\sqrt{3}/\pi\right)\int_1^\infty\frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\left(30/\pi\right)\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^\infty\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=\left(30/\pi\right)\cdot\Big[\arctan z\Big]_{1/\sqrt{3}}^{\infty}=\left(30/\pi\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=10$$

ה.

$$15\cdot\int_0^3 x\cdot\sqrt{1+x}\,dx=15\int_1^4(t-1)\cdot\sqrt{t}\,dt=15\left[\frac{2}{5}t^{2.5}-\frac{2}{3}t^{1.5}\right]_1^4=$$

$$=15\left(\frac{2}{5}\cdot32-\frac{2}{3}\cdot8-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=116$$

שלומי

הסברים לפתרון שאלה 2

א. לכל $n\geq 3$: $\ln(n)\cdot n > n\cdot\sqrt{\ln(n)}$ לכן הטור אינו מתכנס בהחלט, אך האיבר הכללי שואף לאפס מונוטונית (בערכו המוחלט) והסימנים מתחלפים בכל פעם, לכן יש התכנסות בתנאי.

ב. $2^{\ln(n)} < n$ לכן $n^{\frac{1}{\ln(n)}} > 2$ לכל n. האיבר הכללי לא שואף לאפס והטור מתבדר.

ג. לפי לופיטל $\lim_{x\to 0}(\ln(1+x)/x)=1$ אז $\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})/\frac{1}{n})=1$. בנוסף:

$(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right)^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \sqrt{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ כאשר $\lfloor a\rfloor$ הוא השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ a ו $\lceil a\rceil$ הוא השלם הקטן ביותר שאינו קטן מ a.

מכיון שהטור $\sum\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}$ מתכנס בהחלט אז גם הטור שבשאלה מתכנס בהחלט.

ד. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{3n+3}{n+1}}{9\cdot\binom{3n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\cdot(n+1)!}\Big/\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}\right)\cdot\frac{1}{9} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}\cdot\frac{1}{9} = \frac{27}{9\cdot 4} < 1 \Longrightarrow$$ הטור מתכנס בהחלט

פתרון מדויק נוסף:

$$\binom{3n}{n}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \approx$$

$$\overset{\text{נוסחת סטירלינג}}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi\cdot 3n}\cdot\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \overset{\text{עד גורם}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{3^{3n}}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{3^{2n}}$$

וזה נשלט ע"י טור גאומטרי ולכן הטור מתכנס בהחלט.

ה. לפי לופיטל $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=1$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$ לכן האיבר הכללי מתנהג כמו $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$ לכן הטור מתכנס בתנאי.

ו. $$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty}\left((n+1)!\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right)\Big/\left(n!\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1 \Longrightarrow$$ הטור מתכנס בהחלט

ז. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cong\ln(n)$. $\frac{\ln(n)}{n}$ שואף לאפס מונוטונית, אך גדול מ $\frac{1}{n}$, לכן הטור מתכנס בתנאי בלבד.

ח. האיברים במקומות האי זוגיים הם אפס. הטור הוא למעשה $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots\right)$ שבכמו אינו קטן מ $\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\dots\right)=\infty$ לכן הטור מתבדר.

שלומי

הסברים לפתרון שאלה 3

א, ב. לכל n: $f_n(0)=0$ לכן אין אפילו שאיפה נקודתית ל 1.

ג. $1-\frac{1}{1+n\cdot x^2}=\frac{n\cdot x^2}{1+n\cdot x^2}$. בכל הנקודות בקטע כו $0<\frac{1}{1+n\cdot x^2}\le\frac{1}{1+n}$ לכן יש שאיפה במידה שווה.

ד. לכל n: $|u_n(0)|=\sin(\frac{1}{n})\approx\frac{1}{n}$ והטור $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר. הערה: באף נקודה בקטע אין התכנסות בהחלט.

ה. כללית בטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$ כאשר $a_n\ge 0$ לכל n, a_n מונוטונים יורדים, הזנב של הטור החל מהמקום ה-n קטן בערכו המוחלט מ a_n.
לכל $-\infty<x<+\infty$ ולכל $1\le n<\infty$: $\sin(\frac{1}{x^2+n})<\sin(\frac{1}{n})$.
$\sin(\frac{1}{n})$ שואף לאפס כאשר ~~n~~, $\sin(\frac{1}{x^2+n})$ מונוטוני יורד. נקבל שהזנב מונוטוני יורד לאפס, לכן יש התכנסות במידה שווה.

ו. __במקרה זה:__ הטור $\sum u_n(x)$ מתכנס בקטע, טור הנגזרות מתכנס במידה שווה בקטע (בדקו זאת), לכן $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה. הפונקציה הגבולית היא גזירה בקטע ומאפשרת גזירה איבר איבר. מכיון שטור הנגזרות אף רציפות מתכנס במידה שווה אז הסכום הוא בעל נגזרת רציפה.
__במקרה הכללי:__ הטענה לא נכונה תמיד. נניח שלכל n: $u_n(x)=0$ לכל x רציונלי ו $u_n(x)=\frac{1}{n^2}$ לכל x אי-רציונלי אז $\sum u_n(x)$ מתכנס אפילו במידה שווה אך הסכום לא גזיר.

ז. הפונקציה מונוטונית לא יורדת. מתקיים: $g(0)=0$, $g(1)=\sum n/2^n<\infty$, לכן הפונקציה אינטגרבילית.

ח, ט, י. בכל נקודה רציונלית יש לפונקציה קפיצה (ברציונלי $\frac{p}{q}$ יש קפיצה של $qx/2^q$). לגבי x אי רציונלי: מכיון שהטור מתכנס בהחלט אז עבור $\varepsilon>0$ קיים $M<\infty$ (פונקציה של ε) כך שסכום כל האיברים החל ממקום $M+1$ קטן מ ε (וגדול מאפס). נראה שעבור y מספיק קרוב ל x: $\sum_{n=1}^{M}[ny]/2^n=\sum_{n=1}^{M}[nx]/2^n$. מכיון ש x אי רציונלי אז לכל n, nx אינו מספר שלם. מכיון שלכל n הפונקציה nx היא רציפה, אז אם y מספיק קרוב ל x אז ny יהיה בין אותם שני שלמים. נבחר סביבה של x כך שלכל $1\le n\le M$ זה יתקיים. בסביבה זו כל M האיברים הראשונים ב x וב y שווים. בסביבה זו ערכי הפונקציה אינם שונים ביותר מ ε מערכם ב x. לכן הפונקציה רציפה באי רציונלים.

שלומי

הסברים לפתרון שאלה 4

א. רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ הוא לפחות r.
בפנים של התחום הטור מתכנס בהחלט. עבור כל $|a_n x^n|$ שקטן למשל מ- 0.6
מתקיים $|a_n^2 x^{2n}| < |a_n x^n|$. בגלל התכנסות הטור $\sum a_n x^n$ קיים N כך שעבור כל
$n>N$: $|a_n x^n| < 0.6$ ולכן הטור $\sum a_n^2 x^{2n}$ מתכנס עבור $|x|<r$.

ב. נתן רק הסבר שמתבסס על משפט לבג (ראו עמ' 305, 310 בספר לפי הרצאות של פרופ' מ"צלר). לפונקציה קיים אינטגרל רימן אם"ם היא חסומה ומידת נקודות אי הרציפות שלה היא אפס. מכיון ש f היא כזאת אז היא מקבלת ערכים שמוכלים בקטע סגור, כלשהו לכן $f \circ g$ היא חסומה. בנוסף $f \circ g$ היא רציפה בכל נקודה שבה f רציפה. <u>הערה:</u> אם מדובר באינטגרל לא אמיתי אז $g(f(x))$ לא בהכרח אינטגרבילית. למשל ניקח את $f(x)$ להיות $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ עבור $x>0$ ולהיות 0 עבור $x=0$. נגדיר $g(t)=t^4$ אז $g(f(x))=\frac{1}{x}$ לא אינטגרבילית.

ג. דוגמא מפריכה $f_n(x)=1$ עבור $x \ge n$, $f_n(x)=0$ עבור $x \le n-1$, $f_n(x)=x-(n-1)$ עבור $n-1<x<n$. בכל נקודה יש שאיפה לאפס, אך עבור כל n קיימים x-ים כך ש $f_n(x)=1$.

<u>אוסף שאלה לא ממבחן:</u> הוכח <u>ללא</u> שימוש בקריטריון אינטגרל ש $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)} = \infty$

<u>פתרון:</u> נסתכל על סכום האיברים a_n בקטע $2^t < n \le 2^{t+1}$ עבור $1 \le t < \infty$, סכום 2^t האיברים האלה הוא לפחות $\frac{2^t}{2^{t+1} \cdot \ln(2^{t+1})} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot (t+1)}$ אך

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot (t+1)} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t+1} = \infty$$

<u>הערה:</u> בגישה זאת אפשר גם להוכיח ש $\sum \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln(n))} = \infty$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

נתונים אינטגרל אמיתי ואינטגרל לא אמיתי:

$$\int_0^\pi \tan\left(\frac{x}{3}\right)dx \quad ; \quad \int_0^\pi \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

א. חשב את האינטגרל האמיתי

ב. בדוק האם האינטגרל הלא אמיתי מתכנס

פתרון

א. הפונקציה $\tan(x)$ רציפה וחסומה בקטע הסגור $[0, \frac{\pi}{3}]$

לכן קיים אינטגרל רימן $\int_0^\pi \tan\left(\frac{x}{3}\right)dx$.

$$\int_0^\pi \tan\left(\frac{x}{3}\right)dx = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}dx = \left[-3\ln\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi =$$

$$= (-3)\left(\ln(0.5) - \ln(1)\right) = -3\cdot\ln(0.5) = 3\cdot\ln(2)$$

ב. מתקיים $\lim_{x\to\pi}\tan\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$. על פי כלל לופיטל מתקיים

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

האינטגרל $\int_a^\pi \frac{1}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}dx$ לא מתכנס עבור כל $\pi > a$,

לכן לפי מבחן המנה גם האינטגרל $\int^\pi \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx$ לא מתכנס (שבהם אינטגרלים של פונקציות חיוביות שהיחס בינהם שואף לקבוע).

שאלה (מבחינה של פרופ' אהרונסון)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}_+=(0,\infty)$ רציפה במ"ש ב-(a,b)

אז גם $\frac{1}{f}$ רציפה במ"ש ב-(a,b).

פתרון

נפריך את הטענה

נשתמש בפונקציה $f(x)=x$ עבור $0<x<\infty$.

התמונה של הפונקציה היא $(0,\infty)$ (כאשר המקור הוא $(0,\infty)$). הפונקציה רציפה במידה שווה כי עבור כל x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\varepsilon$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ (ה-ε משמש גם כ-δ בקריטריון לרציפות במידה שווה).

הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה רציפה במידה שווה: הגידול שלה כאשר $x\to 0$ מימין הוא $+\infty$. עבור כל $\delta>0$ מתקיים שבקטע $(0,\delta)$ מתקבלים כל הערכים שגדולים מ-$\frac{1}{\delta}$. כך למשל מתקבלים גם הערך $\frac{1}{\delta}+1$ וגם הערך $\frac{1}{\delta}+2$. לכן עבור $\varepsilon=1$ לא קיים δ כך שאם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|<1$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

נתון שבמלבן $0<x<1$, $0<y<1$ מתקיים $|f'_x(x,y)|\le M$ ו־$|f'_y(x,y)|\le M$. הוכח כי הפונקציה רציפה במידה שווה במלבן!

פתרון

נראה שעבור כל $\varepsilon>0$ קיימים δ_1,δ_2 המתאימים ל־ε כך שעבור כל x_1,y_1,x_2,y_2 המקיימים $|x_1-x_2|\le\delta_1$, $|y_1-y_2|\le\delta_2$ מתקיים $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\varepsilon$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| = |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)+f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|+|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|$$

נסתכל על $f(x,y_1)$ כפונקציה של x כאשר y_1 הוא קבוע. מכיון ש־(x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) הן נקודות פנימיות למלבן אז לא רק שהפונקציה $f(x,y_1)$ גזירה בקטע הפתוח (x_1,x_2) אלא שהיא גם רציפה בקטע הסגור $[x_1,x_2]$. לכן מתקיימים תנאי משפט לגרנז' וקיימת נקודה פנימית x שהיא בין x_1 ו־x_2 כך ש: $f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)=f'_x(x,y_1)\cdot(x_2-x_1)$. מכיון ש־$f'_x(x,y_1)\le M$

אז $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|\le M|x_1-x_2|$

באופן דומה מתקיים $|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|y_1-y_2|$.

נבחר $\delta_1,\delta_2=\frac{\varepsilon}{2M}$ ונקבל עבור כל $|x_1-x_2|\le\frac{\varepsilon}{2M}$, $|y_1-y_2|\le\frac{\varepsilon}{2M}$ ש: $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\varepsilon$.

שלומי

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' סולומיאק)

הוכח כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n)}{x^n}$ מתכנס במידה שווה בקטע $(2,\infty)$. נסמן את הסכום ע"י $f(x)$.

האם מתכנס $\int_2^{\infty} f(x)dx$?

__פתרון__

נראה שעבור כל ε נתון קיים N כך שהזנב החל מהמקום ה-N קטן מ-ε עבור כל x בקטע.

עבור x בקטע הזנב של הטור החל מהמקום ה-N שווה ל $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sin(n)}{x^n}$. זה לא גדול מסכום הערכים המוחלטים שקטן מ- $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ עבור x בקטע. זה טור גיאומטרי שמסתכם ל- $\frac{\frac{1}{x^N}}{1-\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x^N}$ הוא מונוטוני יורד בקטע ומקבל ערך מקסימלי עבור $x=2$. לכן הזנב של הטור לא גדול מ- $2^{-N}=\frac{1}{2^N}$,

נבחר $N \ge \frac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(0,5)}$ ונקבל שהזנב קטן אפילו מ- ε.

נראה ש- $\int_2^{\infty} f(x)dx$ מתכנס: הטור של הערכים המוחלטים הוא $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin(n)}{x^n}\right|$ מתקיים $\left|\frac{\sin(n)}{x^n}\right| \le \frac{1}{x^n}$

מתקיים $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \le \frac{2}{x^2}$. מתקיים $\int_2^{\infty}\frac{2}{x^2}dx<\infty$

לכן עפ"י מבחן ההשוואה גם $\int_2^{\infty} f(x)<\infty$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

נתונה סדרת פונקציות f_n המתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע (a,b). הוכח שאם כל אחת מהפונקציות בסדרה רציפה במידה שווה בקטע הרי f רציפה במידה שווה.

פתרון

מכיון שסדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע לפונקציה f אז עבור כל ε קיים n כך ש: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ עבור כל x בקטע. מכיון שעבור n זה הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע אז קיים $\delta>0$ כך שעבור כל x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

עבור x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(x_1)-f_n(x_1)+f_n(x_1)-f_n(x_2)+f_n(x_2)-f(x_2)| \overset{*}{\le} |f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

*אי שיוויון המשולש

שאלה (מבחינה של פרופ' אהרונסון)

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\cdot x^n$

פתרון

מתקיים

$$\binom{3(n+1)}{n+1}\Big/\binom{3n}{n}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}$$

ויחס זה שואף ל $\frac{27}{4}$ לכן עבור $x>\frac{4}{27}$ הערכים של $\binom{3n}{n}\cdot x^n$ לא שואפים לאפס כאשר $n\to\infty$ והטור הנ"ל לא מתכנס. עבור $x<\frac{4}{27}$ מתקיים $\frac{\binom{3(n+1)}{n+1}\cdot x^{n+1}}{\binom{3n}{n}\cdot x^n}<1$ ועל-פי מבחן דלמבר הטור מתכנס.

לכן רדיוס ההתכנסות הנו $\frac{4}{27}$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אהרונסון)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

נגדיר עבור $n\ge 1$ פונקציות $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $f_n(x)=\frac{nx^2}{nx^2+1}$,
אזי קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$
במ"ש ב- $[-1,1]$.

פתרון

נפריך את הטענה.

מתקיים $\frac{nx^2}{nx^2+1} = \frac{nx^2+1}{nx^2+1} - \frac{1}{nx^2+1} = 1-\frac{1}{n^2x^2+1}$

עבור כל $x\neq 0$ בקטע נכה מתקיים
$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{nx^2+1} = 1$. עבור n קבוע נסתכל על
ערך הפונקציה בנקודה $x=\frac{1}{n}$. בנקודה $x=\frac{1}{n}$
ערך הפונקציה $f_n(x)$ הוא $1-\frac{1}{n^2\cdot(\frac{1}{n})^2+1}$. עבור כל n
ביטוי זה שווה ל 0.5. לכן אין שאיפה במידה
שווה ל 1 שהוא הגבול עבור $x\neq 0$ בקטע.

שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

הוכח שסדרת הפונקציות $f_n(x)=\log_n x$ $(n>1)$ מתכנסת במידה
שווה בקטע $[e^{-1},e]$

פתרון:

נראה שסדרת הפונקציות שואפת במידה שווה לאפס בקטע זה.
$\log_n(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(n)}$. הפונקציה $\ln(x)$ היא עולה בקטע $[e^{-1},e]$
ובעלת נגזרת חיובית בכל הקטע לכן היא מקבלת ערך
מכסימלי בקטע עבור $x=e$, לכן עבור כל $e^{-1}\le x\le e$
מתקיים $f_n(x)\le\frac{\ln(e)}{\ln(n)}=\frac{1}{\ln(n)}$. עבור $\varepsilon>0$ מתקיים עבור
$n\ge e^{\frac{1}{\varepsilon}}$: $\frac{1}{\ln(n)}\le\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

שלומי