פתרון מקוצר לבחינה מ 23/07/12

שאלה 1

א. כן
אם עבור כל i מתקיים $P_{i,i+1}=0.5=P_{i,i-1}$ אז זהו הילוך מקרי סימטרי שבו כל המצבים נשנים אפס.

ב. לא
מכל מצב יש מסלול (ישיר) לפחות לאחד משכניו. אם המצב הוא נשנה אז הוא ושכנו זה הם באותה מחלקה ונשנות היא תכונה מחלקתית. (לפי סעיף ה', יתכן שאין כלל מצבים נשנים).

ג. כן
נניח שעבור $i\ge 1$ מתקיים $P_{i,i+1}=0.5=P_{i,i-1}$, עבור $i=0$ מתקיים $P_{0,1}=1$, עבור $i=-1$ מתקיים $P_{-1,0}=1$, עבור $i\le -2$ זוגי מתקיים $P_{i,i-1}=1$ ועבור $i\le -2$ אי זוגי מתקיים $P_{i,i+1}=1$.

כך המצבים $i\le -2$ מחולקים למחלקות של מצבים נשנים חיובית כך שבכל מחלקה יש שני מצבים שכנים. מצב -1 הוא לא ארגודי ולכן חולף והמצבים $i\ge 0$ מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים אפס (כמו בהילוך מקרי סימטרי, בהסתברות 1 קיים שלב שבו חוזרים לראשית, אך תוחלת זמן החזרה היא אין סוף).

ד. לכל היותר 2
נתן דוגמא לשרשרת שבה יש שתי מחלקות של מצבים נשנים אפס:
עבור $i=0$, $P_{0,1}=1$, עבור $i\ge 1$ מתקיים $P_{i,i+1}=0.5=P_{i,i-1}$, עבור $i=-1$ מתקיים $P_{-1,-2}=1$ ועבור $i\le -2$ מתקיים $P_{i,i+1}=0.5=P_{i,i-1}$.
כך האי-שליליים הם מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים אפס וגם השליליים הם מחלקה בלתי פריקה של נשנים אפס.
נראה שלא יכולות להיות יותר משתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס:
במחלקה של מצבים נשנים אפס חייבים להיות אין סוף מצבים (מחלקה סופית אינה נשנת אפס).
על-פי הנתון בשאלה זו, מכל מצב יש מעברים ישירים רק לשכניו. לכן במחלקה אין סופית חייבים להיות כל המצבים החל ממקום מסוים וימינה לו או כל המצבים החל ממקום מסוים ושמאלה לו.
לכן יכולות להיות לכל היותר שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס.

ה. כן
נניח שעבור $i\ge 0$ מתקיים $P_{i,i+1}=0.5=P_{i,i-1}$ ועבור $i\le -1$ מתקיים $P_{i,i-1}=\frac{2}{3}$ ו $P_{i,i+1}=\frac{1}{3}$.
כל מצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה. לכן, אם אחד מהם הוא חולף, אז כולם חולפים.
כמו בהילוך מקרי לא סימטרי, ממצב 0 יכולים לעבור למצב -1 ומשם לא בודאות חוזרים למצב 0.
לכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם חולפים.

שאלה 2

א. ממצב זוגי בהכרח עוברים למצב אי זוגי וממצב אי זוגי בהכרח עוברים למצב זוגי. לכן המחזור הוא כפולה של 2 (איזשהו מספר זוגי) ניתן לחזור ממצב לעצמו בשני צעדים. לכן המחזור הוא לא יותר 2. מצרוף שני אלה מקבלים שהמחזור הוא בדיוק 2.
מדובר בשרשרת בלתי פריקה. לכן קיים לכל היותר וקטור סטציונרי יחיד. בכל מחלקה סופית יש

לפחות וקטור סטציונרי אחד.

ב. כן

מדובר בהילוך מקרי על גרף שלגביו ראינו שיש לו וקטור שמקיים את תנאי האיזון המפורט (אם מכל מצב עוברים לכל אחד משכניו בסכוי שווה, אז זהו הילוך מקרי על גרף).

הוקטור $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ מקיים את תנאי האיזון המפורט: לגבי זוג מצבים שכנים i,j מתקיים $\frac{1}{4}P_{i,j}=\frac{1}{4}P_{j,i}$ (כאשר $P_{i,j}=\frac{1}{2}$ לגבי כל זוג מצבים שכנים). בין מצבים שאינם שכנים כמו 1 ו 3 אין מעברים באף כיוון.

ג. כאשר מתחילים במצב 1 אז בכל שלב אי זוגי נמצאים במצב זוגי ובכל שלב זוגי נמצאים במצב אי זוגי. מתקיים $P_{1,3}{}^{(7)}=0$, $P_{1,3}{}^{(8)}=0.5$.

שאלה 3

א. לא יתכן

זמן השהות במצב מתפלג מעריכית. לכן בכל זמן סופי יתכן שעדיין נשאר במצב ההתחלתי. לכן לא יכולים להיות אפסים על האלכסון הראשי.

ב. כן יתכן

נניח שהיוצר האינפיניטיסימלי הוא $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. בזמן 0 נמצאים במצב ההתחלתי. זאת אומרת שהמטריצה $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ מייצגת את הסתברויות המעבר בזמן 0. מטריצת ההסתברויות הגבוליות היא $\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$. הודות לרציפות הסתברויות המעבר כפונקציה של t ולסימטריה בין המצבים שנשמרת בכל נקודת זמן ושהודות לה בכל זמן אברי האלכסון שווים, לפי משפט ערך הביניים כל קומבינציה בין שתי המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$ מתקבלת באיזשהו זמן.

ג. לא יתכן

לפי מטריצת המעבר, יש מסלול בין מצב 2 למצב 3. בשרשרת בזמן רציף, המעברים יכולים להתרחש בכל זמן. לכן עבור כל זמן t יש אפשרות שבו הגענו ממצב 2 למצב 3. לכן לא יתכן שיש $t>0$ שעבורו מתקיים $P_{2,3}(t)=0$. יתכן $P_{i,j}(t)=0$ רק אם אין מסלול מ i ל j .

ד. לא יתכן

אם מספר מופיע 9 פעמים במטריצת יוצר שבה 4 עמודות, אז קיימת עמודה שבה הוא מופיע לפחות 3 פעמים (יותר מ 3 פעמים בעמודה לא יכולים להופיע איברים חיובים). נניח בלי הגבלת הכלליות ש $\lambda_{2,1}=\lambda_{3,1}=\lambda_{4,1}$. במקרה זה הסתברויות המעבר משלושת המצבים 2,3,4 למצב 1 הן שוות (לגבי מצב 1, לא משנה באיזה משלושת המצבים האחרים נמצאים). לכן בכל זמן t יש במטריצת המעבר לפחות שלושה איברים שווים.

שלומי