פתרון תרגיל 2 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נראה שכל מצבי השרשרת הם חולפים.
עבור כל מצב בשרשרת, ניתן לחזור אליו רק דרך מצב 0 (כל עוד לא חוזרים למצב 0 אז רק מתקדמים למצבים בעלי אינדקס גבוה יותר). כך שאם במצב 0 נבקר רק מספר סופי של פעמים אז גם בכל מצב אחר נבקר רק מספר סופי של פעמים. נראה שלא חוזרים למצב 0 בהסתברות 1.
ההסתברות לחזור למצב 0 בבדיוק $i+1$ צעדים היא לא גדולה מ 0.8^i כי לשם כך צריך בין היתר לעשות מהלך ל 0 בצעד ה- i. יש הסתברות חיובית שבעשרת המהלכים הראשונים לא נחזור למצב 0 .
אם זה קורה אז ההסתברות שעדיין נחזור למצב 0 תהיה לא גדולה מ $\sum_{i=10}^{\infty} 0.8^i = \frac{0.8^{10}}{1-0.8} < 1$
(הסתברות איחוד לא גדולה מסכום ההסתברויות). לכן ההסתברות לחזור למצב 0 היא קטנה מ 1.

שאלה 2

א. הטענה לא בהכרח מתקיימת.
נניח שהמשתנים הם משתנים רציפים. כך כל נקודה מתקבלת בהסתברות אפס. כך המשתנה X_1 מקבל ערך שמתקבל על-ידי כל אחד ממשתני הסדרה בהסתברות אפס. המאורע שיש משתנה אחר בסדרה שמקבל את הערך הזה הוא איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס. לכן יש לו הסתברות אפס.

ב. הטענה בהכרח מתקיימת.
לגבי כל ערך אפשרי ש X_1 יקבל, יש לכל אחד מהמשתנים שבסדרה הסתברות קטנה מ 1 לקבל ערך שלא גדול מערך זה. זאת אומרת שלכל אחד מהמשתנים האחרים שבסדרה יש הסתברות חיובית לקבל ערך גדול מערך זה. מכיוון שהמשתנים שבסדרה הם שווי התפלגות, אז לכל אחד מהם יש את אותה הסתברות לקבל ערך גדול מערך זה. מכיוון שהמשתנים שבסדרה הם ב"ת, אז בהינתן ערכו של X_1 , כל אחד מאחרים גדול מערכו של X_1 באופן ב"ת באחרים. לכן לפי הלמה של בורל קנטלי בהינתן כל ערך של X_1 , בהסתברות 1, אינסוף מהמשתנים שבסדרה יקבלו ערך גדול יותר מערך זה. מכיון שהטענה נכונה לגבי כל ערך אפשרי של X_1 אז היא נכונה.
<u>הערה</u>
המאורעות שמשתנים שונים מקבלים ערכים גדולים יותר ממה שמקבל X_1 אינם ב"ת אם משתנה מסוים מקבל ערך גדול יותר מאשר X_1 , זה מגדיל את הסיכוי ש X_1 קיבל ערך נמוך, ובכך מגדיל את הסיכוי של משתנה אחר לקבל ערך גדול מאשר X_1.

שאלה 3

צפו בפתרון מוקלט [כאן](#).
נתן דוגמא לשרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ שבה על הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ חל החוק החזק, אך על הסדרה $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ החוק לא חל. מטריצת המעבר של שרשרת זו היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

נניח שהמצב ההתחלתי הוא מצב 1. בסיכוי חצי נבקר בכל שלב אי זוגי במצב 2 ובשלב שאחריו במצב 3. בסיכוי חצי נבקר בכל שלב אי זוגי במצב 3 ובכל שלב שאחריו במצב 2. עבור כל $n \geq 1$ מתקיים $E(X_n) = 2.5$. סדרת הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם שואפת ל 2.5 (לא רק בהסתברות 1 אלא תמיד). הסדרה $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ היא בסיכוי חצי סדרה שכל איבריה הם 2, ובסיכוי חצי היא סדרה שכל איבריה הם 3. לכן סדרת הממוצעים המצטברים שלה לא שואפת ל 2.5 .

שאלה 4

נתון שתי דוגמאות של מטריצות מעבר של שרשרות בנות שני מצבים $\{1,2\}$.

<u>דוגמא ראשונה</u>

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מתקיים $P_{1,1}^{(n)} = 0.4^n$ (ניתן להיות במצב 1 בשלב נתון, רק אם עד אותו שלב לא עזבנו את המצב).
כך המאורע של ביקור במצב 1 בשלב n הוא בעל הסתברות 0.4^n.
מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} 0.4^n < \infty$ ולכן סכום ההסתברויות של המאורעות המייצגים ביקורים במצב 1 הוא סופי.
לכן בהסתברות 1 יהיה רק מספר סופי של ביקורים במצב 1, ולכן הוא מצב חולף.

<u>דוגמא שניה</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כאן למאורעות של ביקור במצב 1 בשלב נתון יש הסתברות אפס. לכן סכום ההסתברויות של המאורעות הוא סופי (אפס).

שלומי