<u>פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

<u>שאלה 1</u>

לשרשרת מרקוב המייצגת את מספר הכדורים בכד הראשון בזמן נתון יש חמישה מצבים ומטריצת מעבר:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

אם למשל בשלב מסוים יש בכד הראשון כדור אחד, אז הוא מועבר לכד השני בסיכוי $\frac{1}{4}$ ובסיכוי המשלים מועבר כדור לכד הראשון.

<u>שאלה 2</u>

בשני הסעיפים הראשונים מדובר בשרשרות מרקוב.
מטריצת מעבר בשני הסעיפים הראשונים היא

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$Z_{n-3}=0$ אומר שגם בשלב ה $n-3$ וגם בשלב ה n לא התקבל הערך 1. במקרה כזה Z_n לא יכול לקבל את הערך 2. לכן,

$$P(Z_n=2 \mid Z_{n-1}=2, Z_{n-3}=0)=0 \neq P(Z_n=2 \mid Z_{n-1}=2, Z_{n-3}=2)$$

לכן לא כל המידע הרלוונטי מהעבר לגבי Z_n נמצא ב Z_{n-1} . לכן Z_n אינה שרשרת מרקוב.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. שרשרת מרקוב בעלת שני מצבים ומטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שני המצבים הם בשתי מחלקות שונות. אם שני תהליכים מתחילים במחלקות שונות, אז הם לעולם לא יפגשו, כי אין מעברים בין מחלקות שונות.

<u>ב</u>. שרשרת מרקוב בעלת שני מצבים ומטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כשמתחילים במצב, אז תמיד נמצאים בו בשלבים הזוגיים ונמצאים במצב האחר בשלבים האי זוגיים.

ג. שרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים ומטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

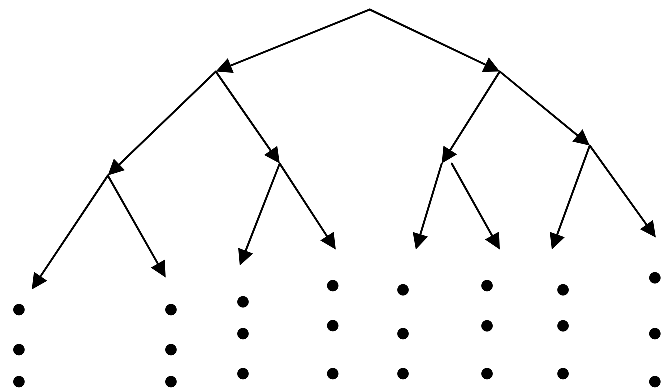
יש כאן שני מצבים נשנים (הם מצבים סופגים, כאלה שאם נמצאים בהם אז לעולם לא עוזבים אותם) ויש מצב חולף שממנו מגיעים לכל אחד מהנשנים בסיכוי 0.5 . שני תהליכים שמתחילים במצב החולף יכולים שניהם לעבור לאותו מצב סופג ואז הם יפגשו בכל שלב. הם גם יכולים לעבור למצבים סופגים שונים ואז הם אף פעם לא יפגשו לאחר שלב 0.

ד. נתאר שרשרת שמצביה הם צמתי עץ אין סופי. לכל צומת יש שני בנים. לכל צומת חוץ מהצומת שבראש העץ, יש רק הורה אחד.

ניתן לתת מספור לכל הצמתים. לצומת ובשכבה n נתן לצמתים שמות של מצבים בין $2^{n-1}+1$ ל 2^n (אבל, המספור הוא לא הדבר העקרוני).

בכל שלב עוברים בסיכוי שווה מהצומת שבו נמצאים אל אחד הבנים שלו. שני התהליכים יתחילו בראש העץ. הם יכולים לעשות עד כל שלב סופי את אותו מסלול. אבל בהסתברות אחת הם יפרדו באיזשהו שלב סופי ויותר לא יפגשו, ולכן הם לא יהיו באותם מצבים אין סוף פעמים.

ההסתברות שב n שלבים הם תמיד יעשו מעברים זהים היא 0.5^n. ההסתברות שאין סוף פעמים הם יעשו מעברים זהים קטנה מ 0.5^n לכל n, ולכן שווה לאפס.



שלומי