

מספר הקורס: 0509.2805.04  
מועד ב', סמסטר ב', תשס"ז,  
מועד הבחינה: 3.9.07  
משך הבחינה: 3 שעות

**מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסת חשמל)**

דר. ענת סאקוב

\_\_\_\_\_ תעודת זהות:

\_\_\_\_\_ מספר מחברת:

---

לשימוש הבודקים:

\_\_\_\_\_ 1

\_\_\_\_\_ 2

\_\_\_\_\_ 3

\_\_\_\_\_ 4

\_\_\_\_\_ סה"כ

---

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם  
מחוץ לאתר של שלומי.

מספר הקורס: 0509.2805.04  
מועד ב', סמסטר ב', תשס"ז,  
מועד הבחינה: 3.9.07  
משך הבחינה: 3 שעות

**מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסת חשמל)**

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - ארבעה דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות האפשרי בבחינה הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100. מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- בכל השאלות, פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

בהצלחה!

שאלה 1 (24 נקודות - כל סעיף 6 נקודות):

בקזינו רולטה שבה 38 גזרות: 18 לבנות ועליהן המספרים האי-זוגיים בין 1 - 35, ו-18 גזרות שחורות שעליהן המספרים הזוגיים בין 2 - 36. שתי הגזרות הנותרות אדומות, על אחת רשום "0", ועל השנייה "00". ניתן להמר רק על גזרות לבנות ושחורות. עידו מחליט לשחק 10 משחקים ובכולם להמר על תשעת המספרים 1 - 9. כל משחק עולה \$1, ואם הוא זוכה הוא מקבל \$2 חזרה.

א. מה הסיכוי שב-10 משחקים עדו יזכה בדיוק 3 פעמים?

הסיכוי למשחק אחד הוא  $\frac{9}{38}$ .  
 צרוש ש'פ'ו 3 פ'ל'ות ו 7 כ'ל'ונ'ות.  
 הפ'סת'יות ל'כ' פ'י'ל'  

$$\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{9}{38}\right)^3 \cdot \left(\frac{29}{38}\right)^7$$

ב. מה הן תוחלת וסטיית התקן של הרווח הנקי ב-10 משחקים, אם עדו יהמר בכל אחד מעשרת המשחקים על 9 גזרות שונות?

ה'ל' מ'ש'ח'ק ס'כ'ו'ו ל'צ'כ'ו'ת פ'ס  $\frac{9}{38}$ . ז'ס כ'ל'ש'ר ה'ל'ל פ'ע'ם  
 פ'ט'ל מ'ה'פ'ר ע'ם ז'כ'ר'ו'ת ש'ו'ל'ת א'ל'ז י'ס א'י' ת'ל'ו'ת ה'ן  
 מ'ש'ח'ק'ים ש'ו'נ'ים. ו'ל'א'ת' ה'ר'ו'ח ה'פ'ע'ם ק'ו'צ'ת פ'י'ל'  

$$\frac{9}{38} \cdot 1 - \frac{29}{38} \cdot 1 = -\frac{20}{38}$$
  
 מ'ש'ח'ק'ים פ'י'ל'  $-10 \cdot \frac{20}{38}$ . ש'ו'ל'ת ה'ר'ו'ח ה'מ'ש'ח'ק ק'ו'צ'ת  
 פ'י'ל'  $\frac{9}{38} \cdot 1^2 + \frac{29}{38} \cdot (-1)^2 - \left(\frac{20}{38}\right)^2$ . ה'ז'ל'ל פ'י'ל' ת'ל'ו'ת, ש'ו'ל'ת ה'ר'ו'ח  

$$10 \left( \frac{9}{38} \cdot 1^2 + \frac{29}{38} \cdot (-1)^2 - \left(\frac{20}{38}\right)^2 \right)$$
  
 ו'ס'ט'י'ת ה'ת'ק'ן פ'י'ל' ה'פ'א'ר'ט ש' ז'כ'ר'.

קצק אחיית:

$X \sim B(10, \frac{9}{38})$  מספר משחקים שיהיה זוכה מתבטא  
הכוח הוא  $X - (10 - X) = 2X - 10$ .

$$E(2X - 10) = 2 \cdot E(X) - 10 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{9}{38} - 10 = \dots$$

$$\sqrt{V(2X - 10)} = \sqrt{V(2X)} = \sqrt{2^2 \cdot V(X)} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{9}{38} \cdot \frac{29}{38}} = \dots$$

ג. ביום אחר עדו מחליט להמר באותו האופן, אבל לשחק עד אשר יפסיד בפעם השלישית ואז יפסיק. מהי תוחלת הרווח הנקי של עדו?

כזמן ק'ן הכנסה ע'הכנס מתבטא  $G(\frac{29}{38})$ . יש ס'ן  
שלושה מצ'י צ'ב'ה ע'הכנס שלם אח'ז מה' יש  
תוחלת  $\frac{1}{\frac{29}{38}} = \frac{38}{29}$ . ה'ט' יב'ס'ז ק'ם מק'ה 37  
משחקים ו'זכ'ה מספר משחקים ק'ם תוחלת  
 $3 \cdot \frac{38}{29} - 3 = \frac{27}{29}$ .  
ע'סן תוחלת כ'רווח ה'נק' ע'ט'  $\frac{27}{29} \cdot 1 - 3 \cdot 1$

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם  
מחוץ לאתר של שלומי.



שאלה 2 (21 נקודות – סעיף ג 6 נקודות; השאר 5 נקודות)

התפלגות גובה נשים היא בקירוב נורמלית עם תוחלת של 166 ס"מ וסטיית תקן של 5 ס"מ.

א. מה הסיכוי שהממוצע של 100 נשים שנבחרות באקראי יהיה גבוה מ-167 ס"מ?

$$E\left(\frac{S_{100}}{100}\right) = 166 \quad \sigma\left(\frac{S_{100}}{100}\right) = \sqrt{\frac{100 \cdot 5^2}{100^2}} = 0,5$$

כדיסתוריות המלקיטי:  $1 - \phi\left(\frac{167 - 166}{0,5}\right) = 1 - \phi(2) = \dots$

ב. מהי תוחלת מספר הנשים במדגם של 100 הנשים שיהיו גבוהות מ-170 ס"מ?

לכל אישה נמלאת כהסתוריות שפלא תב'ה זלורה  
 N: 170 כ'א:  $p = 1 - \phi\left(\frac{170 - 166}{5}\right) = \dots$  תוחלת מס'ם  
 ש'לה מס'ם התחל'ות, ע'סן כ'א ט'אן ק 100.

ג. בוחרים באקראי שתי נשים. מה הסיכוי שההפרש בין הגבהים שלהן יהיה גדול מ-10 ס"מ?

כ'ו'  $Z_1$   $Z_2$  ז'ורה כ'ש'ם.  
 $E(Z_1 - Z_2) = 0$   $\sigma(Z_1 - Z_2) = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$   
 $P(|Z_1 - Z_2| > 10) = P(Z_1 - Z_2 > 10) + P(Z_1 - Z_2 < -10) =$   
 $= 2 \cdot P(Z_1 - Z_2 > 10) = 2 \cdot 2 \cdot \phi\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right)$

ד. הגובה של אחותי 160 ס"מ. באיזה אחוזון היא נמצאת?

כ'ה כ'ס'ו' ע' אישה אקס'יות ע'כ'יות נ'אוכ'ה N 160  
 $\phi\left(\frac{160 - 166}{5}\right) = 1 - \phi\left(\frac{6}{5}\right) = \dots$

שאלה 3 (30 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

שישה זוגות נשואים מגיעים לארוחת ערב. הם מתיישבים סביב שולחן שבו 6 מקומות בצד אחד, ועוד 6 בצד שמולו. הנשים מתיישבות באקראי בצד אחד, והגברים באקראי בצד ממול.

א. מהי תוחלת מספר הזוגות שיושבים אחד מול השני?

פ'  $I_i$  פא'נצ'קאר ס'ק' ע'ס' נ'ס'ס' י'ש'ל' א'ל'ז' נ'ס'ס' פ'ס'ן.  
 נ'ק'ק'  $E(\sum_{i=1}^6 I_i)$  ס'ס' ,  $E(I_i) = \frac{1}{6}$  :  $1 \leq i \leq 6$   
 ס'ס'  $E(\sum_{j=1}^6 I_j) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

ב. יהי  $I_1$  משתנה מציינ שהזוג זהבי יושב אחד מול השני, ו-  $I_2$  משתנה מציינ שהזוג כספי יושבים אחד מול השני. מהו מקדם המתאם ביניהם?

$$\frac{E(I_1 \cdot I_2) - E(I_1) \cdot E(I_2)}{\sqrt{V(I_1) \cdot V(I_2)}} \quad ? \quad 3 \text{ נ'ק'}$$

כ'ס'ס'  $E(I_1) = E(I_2) = \frac{1}{6}$   $E(I_1 \cdot I_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$

(כ'ס'ס' ס'ס' א'נ'צ'ק' א'ר'ס')  $V(I_1) = V(I_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

ג. הזוג זהבי יושבים האחד מול השנייה. מה הסיכוי שכל הזוגות יושבים אחד מול השני?

דפ'נתן פתיקים של כולו נבד' י' 5 ס'צוכ'ם  
 שזונ'ם 8 כ'צכ'שה מתק' 5.5 ס'צוכ'ם אפ'ש'ר'ם.  
 לכן כ'ס'כ'ו כ'טו  $\frac{1}{5}$

ד. יהי X מספר הנשים שיושבות באחד מהמקומות מימין לבעל שלהן. מה התוחלת של X?

ל'כל' א' א'ש'ה כ'הסת'ר'ות ש'כ'א י'ש'ד'ת מ'א'ס ד'ע'ל'ה  
 כ'טו  $\frac{1}{6}$  ו'הסת'ר'ות ש'כ'א י'ש'ד'ת מ'י'מ'י'נ'ו כ'טו  

$$P = \frac{1 - \frac{1}{6}}{2}$$
 (ש'ל'ה ל'הסת'ר'ות ש'כ'א י'ש'ד'ת מ'ש'ט'ל'ו)  
 ת'וח'ל'ת כ'כ'כ'ים ש'ל'ה ל'ס'כ'י'ה ה'ת'וח'ל'ת  $P_6$ .

ה. אחד הנוכחים מציע שהגברים יתיישבו באקראי ולאחר מכן, הנשים יתיישבו כל אחת מול בעלה. מה הסיכוי שהזוג כספי והזוג זהבי יישבו אחד ליד השני?

צ'ר'א'ם ש'ש'נ'י כ'ז'ר'י'ם י'ת'ש'ל'ו א'ח'ד 3 מ'א'ס כ'ט'ו.  
 ל'כ'נ' כ'ס'כ'ו כ'טו  $\frac{2! \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}$

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם  
 מחוץ לאתר של שלומי.



שאלה 4 (30 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

נגר בונה מסגרת מלבנית באופן הבא: הוא לוקח שני מקלות זהים שאורכם הוא  $Y$ , ו- $Y$  מתפלג לפי ההתפלגות האחידה בין  $(0.5, 2)$  מטר, ואז הוא בוחר 2 מקלות זהים נוספים שאורכם  $X$ , ו- $X$  מתפלג אחיד על  $(0.5, 1)$  מטר. בחירות האורך בלתי תלויות אחת בשנייה.

א. מהי הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ ?  
 מכיון שיש אלו תנאים של הצפיפות המשותפת ביטא

$$\frac{1}{(2-0.5)(1-0.5)} = \frac{4}{3}$$

ב. מהי צפיפות ההיקף של המלבן? מצאו נוסחה וציירו.

יפא  $W=2X$ ,  $V=2Y$   
 יפא  $Z=2X+2Y$ ,  $W \sim U(1, 2)$ ,  $V \sim U(1, 4)$

הצפיפות שונה מאפס עבור  $2 \leq Z \leq 6$

אם נוסחת הקונולאציה:  
 $f_Z(z) = \int_{\min(4, z-1)}^{\max(1, z-2)} 1 \cdot \frac{1}{3} dv$

$$f_Z(z) = \frac{z-2}{3}$$

אכן עבור  $2 \leq z \leq 3$

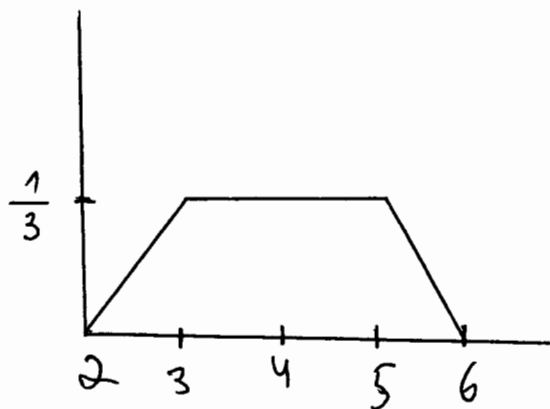
$$f_Z(z) = \frac{2-1+(z-2)}{3} = \frac{1}{3}$$

עבור  $3 < z \leq 5$

$$f_Z(z) = \frac{4-(z-2)}{3} = \frac{6-z}{3}$$

עבור  $5 < z \leq 6$

היפא א פונקציה הצפיפות:



ג. מהי תוחלת השטח?

$$E(Y, X) = \frac{1}{c} E(Y) \cdot E(X) = \frac{0.5+2}{2} \cdot \frac{0.5+1}{2}$$

ד. בונים 200 מלבנים בצורה זו. מהי תוחלת מספר המלבנים שבהם האורך קטן Y מהרוחב X?

אולי נאמין קצת קדימה כי כן

$$\int_{0.5}^1 \int_{0.5}^2 \frac{4}{3} dx dy = \int_{0.5}^1 \frac{4}{3} (y-0.5) dy = \dots$$

תוחלת המספר שווה למספר המלבנים שהם קטנים.

ה. מה הסיכוי שההיקף הממוצע של 200 המלבנים הללו יהיה קטן מ- 3.8 מטר?

תוחלת ההיקף של מלבן 33/7 פטל  $2 \left( \frac{0.5+2}{2} \cdot \frac{0.5+1}{2} \right) = 4$  פטל

שונת ההיקף פטל  $V(2x+2x) = V(2x) + V(2x) = 4 \cdot V(x) + V(x) =$

$$= 4 \cdot \frac{(2-0.5)^2}{12} + 4 \cdot \frac{(1-0.5)^2}{12} = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

תוחלת הממוצע של 200 המלבנים פטל 4,

סטיית התקן פטל  $\sigma = \sqrt{\frac{200 \cdot \frac{5}{6}}{200^2}} = \sqrt{\frac{1}{240}}$

בהסתברות המדויקת פטל קק'ה'ג  $\Phi\left(\frac{3.8-4}{\sqrt{\frac{1}{240}}}\right)$

ובהסתברות זאת קרוכה ל'ב'ס.

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם  
מחוץ לאתר של שלומי.