

מועד א', סמסטר ב', תשס"ז,  
תאריך הבחינה: 25.7.07  
משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת תל אביב  
הפקולטה למדעים מדוייקים  
בית הספר לפיזיקה

## הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

תעודת זהות: \_\_\_\_\_

---

לשימוש הבודקים:

1 \_\_\_\_\_

2 \_\_\_\_\_

3 \_\_\_\_\_

4 \_\_\_\_\_

סה"כ \_\_\_\_\_

מועד א', סמסטר ב', תשס"ז,  
תאריך הבחינה: 25.7.07  
משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת תל אביב  
הפקולטה למדעים מדוייקים  
בית הספר לפיזיקה

### הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - בארבעה דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלאות של התפלגות נורמלית והתפלגות חי בריבוע.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

**בהצלחה !**

שאלה 1 (23 נקודות: סעיפים א - ג 6 נקודות; סעיף ד 5 נקודות)

ערן משחק בקזינו את המשחק הבא, שעלותו \$1 לכל סיבוב: ערן זורק קובייה, ועובד הקזינו זורק קובייה אחרת. יהי X ההפרש, בערך מוחלט, של שתי ההטלות. אם X מקבל ערכים 2 או 4, ערן מקבל חזרה \$1.5 (כלומר רווח נקי של \$0.5).

א. מהן התוחלת וסטיית התקן של X? יפה! X טענות פפאלס ל ערן.

יפה! X טענות פפאלס ל ערן.  
 $P(X=0) = \frac{6}{36}$

$P(X=1) = P(X_1=1) \cdot P(X_2=2) + P(X_1=2) \cdot P(X_2=1) + P(X_1=2) \cdot P(X_2=3) = \dots$   
 (יש 10 טענות סכומים של מספרים שונים קטנים מאחד)  $= \frac{10}{36}$

$P(X=2) = \frac{8}{36}$  (כאן יש 8 טענות סכומים)

$P(X=3) = \frac{6}{36}$      $P(X=4) = \frac{4}{36}$      $P(X=5) = \frac{2}{36}$

$E(X) = \frac{10}{36} \cdot 1 + \frac{8}{36} \cdot 2 + \frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{4}{36} \cdot 4 + \frac{2}{36} \cdot 5 = \dots$

$E(X^2) = \frac{10}{36} \cdot 1^2 + \frac{8}{36} \cdot 2^2 + \frac{6}{36} \cdot 3^2 + \frac{4}{36} \cdot 4^2 + \frac{2}{36} \cdot 5^2$

$G(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$

ב. אם ערן קבל כסף בחזרה. מה הסיכוי שהקובייה שלו הראתה מספר זוגי?

מקורסת פסתגרות מולגה.

$P(\text{הטאתה ערן} | \text{היה זוגי}) = \frac{P(\text{הטאתה זוגי} \cap \text{ערן זוגי})}{P(\text{ערן זוגי})} =$

$= \frac{P(X_1=2) \cdot (P(X_2=4) + P(X_2=6)) + P(X_1=4) \cdot (P(X_2=2) + P(X_2=6)) + P(X_1=6) \cdot (P(X_2=2) + P(X_2=4))}{P(X=2) + P(X=4)}$

$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{8}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{1}{2}$

ג. מהן תוחלת ושונות הרווח הנקי ב-10 משחקים? במשחק לזכרון 33% הרווח מרווח 0.5

ג' כ"ו  

$$P(X=2) + P(X=4) = \frac{8}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{3}$$

תוחלת הרווח במשחק לזכרון 33% הרווח  

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

שונות הרווח במשחק לזכרון 33% הרווח  

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot (-1)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

תוחלת הרווח ק 10 משחקים שווה ל-5  
 $10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5$   
 מכון שתוצאת המשחקים השונים הן ראשי תיבות א"כ שונות הרווח שווה ל-5  
 ל 10 פעמים שונות הרווח של משחק לזכרון 33%  
 $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

ד. ערך שמע שהקובייה בידי עובד הקזינו אינה מאוזנת והיא מראה מספר זוגי בסיכוי כפול מאשר מספר אי-זוגי (אבל לכל הזוגיים אותו סיכוי ולכל האי-זוגיים אותו סיכוי). הוא מחליט לנהל מעקב במהלך 100 זריקות של הקובייה, ולבדוק זאת. להלן השכיחויות של התוצאות השונות:

ערך	1	2	3	4	5	6
שכיחות	14	20	10	24	9	23

רשמו בצורה ברורה מהי ההשערה הנבדקת. בדקו את ההשערה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.

ה' ז' - תוצאות הטלר לזכרון  

$$H_0: P(2=1) = P(2=3) = P(2=5) = \frac{1}{9}$$

$$P(2=2) = P(2=4) = P(2=6) = \frac{2}{9}$$

נבדק את ההשערה לטובת מחנן ט"ו (ההיתאמה)  

$$\chi^2 = \frac{(14 - 100 \cdot \frac{1}{9})^2}{100 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(20 - 100 \cdot \frac{2}{9})^2}{100 \cdot \frac{2}{9}} + \frac{(10 - 100 \cdot \frac{1}{9})^2}{100 \cdot \frac{1}{9}} +$$

$$+ \frac{(24 - 100 \cdot \frac{2}{9})^2}{100 \cdot \frac{2}{9}} + \frac{(9 - 100 \cdot \frac{1}{9})^2}{100 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(23 - 100 \cdot \frac{2}{9})^2}{100 \cdot \frac{2}{9}} = 1.655$$

לפי טבלת  $\chi^2$  עם 5 דגים חופש מתקבלת מודעות  
 לטובה 0.05 ואם נקרא את ההשערה.

שאלה 2 (30 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

לקוח מגיע למשרד ממשלתי בשעה 8:08 בבוקר ומקבל מספר 111. זמן השרות מתפלג מעריכית, ו-90% מהלקוחות מסיימים את השרות תוך 4.6 דקות. באותו בוקר עובד פקיד אחד בלבד שהחל לעבוד בשעה 8 בדיוק. הפקיד עושה הפסקה של 10 דקות אחרי כל 20 לקוחות.

א. מהי תוחלת זמן השרות?

מבנה ההתפלגות מעריכית דעת פונקצית ההסתברות

$$1 - e^{-\lambda x}$$

מתקיים  $1 - e^{-4.6\lambda} = 0.9 \implies e^{-4.6\lambda} = 0.1 \implies \lambda \approx 0.5$

תוחלת זמן השרות היא  $\frac{1}{\lambda} = 2$ .

ב. מהי תוחלת הזמן של תחילת ההפסקה הראשונה?

עצ ההפסקה הראשונה יש 20 בקי' שיהיו. תוחלת הזמן עצ ההפסקה היא  $\frac{20}{\lambda} = 40$  (תוחלת סכום תמ'3 שווה לסכום התוחלות) אכן תוחלת זמן תחילת הפסקה זו היא  $(\frac{20}{\lambda} + 8)$  שעה 8:40

ג. בשעה 8:08 לקוח מספר 1 נמצא בטיפול כבר 8 דקות. מה הסיכוי שהטיפול בו ייקח יותר מ-10 דקות?

ציוס שהאנוס קו החם מרגע כה יקד ארצ אפאלת 2 צקות, דגלם תכלת חוסר הצברון של ההתפלגות מעריכית, ההסתברות של שווה  $e^{-2\lambda} = e^{-1}$ .

ד. בהמשך לסעיף הקודם: מה הסיכוי שתאלץ להמתין יותר מ-4 שעות בתור?

כאמור הצמח הנוטר אלקואה החלטון פטל דגם היתבולת  
הצורה שהתבולת המקורית של זמן הסירות הטלם.

יש גלן סכום 110 משתנים (ה)קאש ואלו 5 פיקי  
הפיקה אלקואה לוח 5 צקות, אכן צרום סכום

110 המשתנים המעריכיים יהיה שצום מ.  $4.60 - 50 = 190$   
מ-תחלת הסכום של 110 המשתנים הילן

שנות הסכום הילן  $\sigma^2 = \frac{110}{n} = 440$   
אכי משט הקול המרכזי ההמתנות הילן קקראקי:

$$1 - \Phi\left(\frac{190 - \mu}{6}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{190 - 220}{\sqrt{440}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-30}{\sqrt{440}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{440}}\right) = \dots$$

ה. מהי תוחלת וסטיית תקן מספר האנשים שמטופלים בשעה, אם הפקיד לא עושה הפסקות?

פיק הצמח גין ס'ום שירות אחר ע'ס'ום הסירות הסו  
מתבולת (ה)קאש אכן מספר הא'רוצ' דצקה מתבולת

(ה) ס. קשור, מספר הא'רוצ' מתבולת (הס'ום) ס, הילן

דגם תחלת 30=הס'ום וס'יות תקן  $\sqrt{30} = \sqrt{\text{הס'ום}}$

שאלה 3 (23 נקודות: סעיף ג 5 נקודות; שאר הסעיפים 6 נקודות)

פקיד במשרד התחבורה מחדש רשיונות לנהגים ותיקים או מוציא רשיון לנהגים חדשים. זמן הטיפול בחידוש רשיון הוא 5 דקות, וברשיון חדש 10 דקות. כל בוקר הוא מקבל 80 רשיונות לטיפול באותו היום. הסיכוי של כל רשיון להיות חדש הוא 0.2, ואין תלות בין סוגי הרשיונות שהוא מקבל לטיפול.

א. מה הסיכוי שביום מסויים יעבוד יותר מ-9 שעות (נטו)?

י' ה'  $X$  - מספר הרשיונות החדשים  
 י' ה'  $S$  - הזמן הכולל

$$S = 10X + 5(80 - X) = 400 + 5X$$

9 שעות נגד 540 דקות אט זריס  $400 + 5X > 540$

אלו  $X > 28$ , מספר הרשיונות החדשים מתפלג  $B(80, 0.2)$ ,  
 אכן הוא דגם תואמת  $M = 16$  וסט"ת זקן  $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0.2 \cdot 0.8}$

אפי משט פקודת המרכז מתקבלת הכתובת מקייבת:

$$P = \Phi\left(\frac{29 - 16}{6}\right) = \dots$$

אלו אם מתנאים דתיקון רציבות אלו  
 $P = \Phi\left(\frac{28.5 - 16}{6}\right)$

ב. מהי תוחלת זמן הטיפול היומי ברשיונות חדשים?

דגם רשיון חדש מטפלם 10 דקות, דמיונם י

$16 = 80 \cdot 0.2$  רשיונות חדשים, אכן דמיונם מטפלם

$160 = 16 \cdot 10$  דקות רשיונות חדשים.

ג. פקיד אחר מקבל 80 רשיונות ביום, והסיכוי לרשיון חדש הוא 0.1. יהי  $X$  מספר הרשיונות החדשים ששניהם מנפיקים ביום, ביחד. מה ההתפלגות של  $X$ ? ניתן להניח שאין תלות בין שני הפקידים. פשטו כמה שניתן.

'ה'  $X_1$  - מספר הרשיונות החדשים שמנפק הראשון.  
 'ה'  $X_2$  - מספר הרשיונות החדשים שמנפק השני.  
 $X = X_1 + X_2$ ,  $X_1 \sim B(80, 0.2)$ ,  $X_2 \sim B(80, 0.1)$   
 עבור  $0 \leq k \leq 160$ :

$$\begin{aligned}
 P(X=k) &= \sum P(X_1=i) \cdot P(X_2=k-i) = \\
 &= \sum \binom{80}{i} \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{80-i} \cdot \binom{80}{k-i} \cdot 0.1^{k-i} \cdot 0.9^{80-k+i}
 \end{aligned}$$

הסכמה עבור  $0 \leq i \leq 80$  ו-  $0 \leq k-i \leq 80$

ד. מה התוחלת של  $X$ ?

$$\begin{aligned}
 E(X) &= E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 80 \cdot 0.2 + 80 \cdot 0.1 = \\
 &= 24
 \end{aligned}$$



שאלה 4 (29 נקודות): סעיף ב' 5 נקודות; שאר הסעיפים 6 נקודות):

בוחרים נקודה מריבוע היחידה לפי ההתפלגות שלה הצפיפות המשותפת הבאה:

$$f(x, y) = c(x + y - 2xy) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\int_0^1 \int_0^1 c(x + y - 2xy) dy dx = 1 \implies c \int_0^1 \left( xy + \frac{1}{2} y^2 - xy^2 \right) dy dx = 1$$

א. מהו c?

$$\implies c \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2} - x \right) dx = 1 \implies c = 2$$

ב. זהו את ההתפלגות השולית של X.

$$f_X(x) = \int_0^1 c(x + y - 2xy) dy = 2 \int_0^1 (x + y - 2xy) dy =$$

$$= 2 \left[ xy + \frac{1}{2} y^2 - xy^2 \right]_0^1 = 1$$

X מתפלג אחיד בקטע (0, 1)

על כן  $F_X(x) = x$  עבור  $0 \leq x \leq 1$ .

ג. מהו האחוזון ה-80 של X.

מכיון ש  $F_X(x) = x$  נכונ  $0.8$  פה  $0.8$

על כן  $0 \leq x \leq 1$  פה  $0.8$

ד. מהו מקדם המתאם בין X ו-Y ?  
 מכיון ש  $X \sim U(0,1)$  !  $Y$  גם (ההתפלגות הצפופה  $\delta-X$ )  
 גם מתפלג אלז ?  $(0,1)$  אלז  $E(Y) = E(X) = 0.5$   
 !  $V(Y) = V(X) = \frac{1}{12}$  !

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^1 2(x+y-2xy) \cdot xy \, dy \, dx = \dots = \frac{2}{9}$$

$$\rho(x, y) = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = -\frac{1}{3}$$

ה. בוחרים 100 זוגות של נקודות, ולכל זוג מחשבים את  $Z = (X+Y)/2$ . מה הסיכוי שהמוצע של ערכי Z יהיה קטן מ-0.53 ?

אלגי נקודה קוצבת התפלגות היא  $\frac{0.5+0.5}{2} = 0.5$   
 פשוט היא:  $\frac{V(X+Y)}{2^2} = \frac{V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)}{4} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 2 \cdot (-\frac{1}{36})}{4} = \frac{1}{36}$

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = -\frac{1}{36}$$

למחרת א 100 פגאות יש תפלגות  $100 \cdot 0.5 / 100 = 0.5$   
 קצתם אין תפלגות בין פגאות אולם שנות התמונצ -  
 6 היא

$$100 \cdot \frac{1}{36} / 100^2 = \frac{1}{3,600}$$

מ"ת התקן א התמונצ היא  $\frac{1}{60}$   
 ע"י משפט בינום פאריס' הפסת גיות פאוקרית היא דק'רוד:  
 $\Phi\left(\frac{0.53 - 0.5}{\frac{1}{60}}\right) = \dots$