

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד ב', סמסטר א', תשס"ז,
מועד הבחינה: 4.4.07
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

_____ תעודת זהות:

_____ מספר מחברת:

לשימוש הבודקים:

_____ 1

_____ 2

_____ 3

_____ 4

_____ סה"כ

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד ב', סמסטר א', תשס"ז,
מועד הבחינה: 4.4.07
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - ארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- סעיף אחד הינו "שאלה אמריקאית". עליכם להקיף תשובה אחת בלבד, באופן ברור.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה הוא 6 נקודות. (הסכום המקסימאלי הוא 114, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- בכל השאלות (חוץ מהשאלה האמריקאית) פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

בהצלחה !

שאלה 1

בעיר מסויימת, מספר התינוקות שנולדים בחודש מתפלג פואסונית עם תוחלת של 20 תינוקות בחודש.

א. מה הסיכוי שבשלושת החודשים הראשונים של השנה יולדו 55 תינוקות?

X - מספר הילדים ב 3 חודשים מתפלג $P(60)$.

$$P(X=55) = \frac{e^{-60} \cdot 60^{55}}{55!}$$

(סכום של צימודים בטאונים קלתי תלויים מתפלג בטאונטי.)

ב. אם בשלושת החודשים הראשונים של השנה נולדו 55 תינוקות, מה הסיכוי ש-20 מתוכם נולדו במרץ?

חילוק הסתברות מועבר. ציון 20 יולדו קלודי מרץ
 1 35 יולדו בחודשים הראשונים של השנה. מספר הילדות
 בחודשים אחרים הם קלתי תלויים.

$$\frac{\frac{e^{-20} \cdot 20^{20}}{20!} \cdot \frac{e^{-40} \cdot 40^{35}}{35!}}{\frac{e^{-60} \cdot 60^{55}}{55!}} = \dots = \binom{55}{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{35}$$

היתקלה הסתברות ששתנה $P\left(55, \frac{1}{3}\right)$ יקרה את הערך 20.

ג. מה הסיכוי שהתינוק הראשון נולד במחצית השנייה של ינואר?

התפלגות הצמן עם הלינה הטלונה היא מעליבת עם בהטח
 20 אלודי. ציון שפא תדרת לפני בולד הודוד הטלון אק
 לא לפני מחצית הודוד הטלון.

ה' ז-צמן הלינה הטלונה:

$$P(0.5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < 0.5) = (1 - e^{-20}) - (1 - e^{-10}) = e^{-10} - e^{-20}$$

והסתברות זאת היא נמוכה מאוד.

שאלה 2

3 זוגות נשואים מגיעים למסעדה. במסעדה שולחן פנוי אחד ובו 4 מושבים. הם מחליטים לערוך הגרלה מי יישאר במסעדה. השניים האחרים ילכו לסרט. יהי X מספר הזוגות הנשואים שיושבים ליד השולחן.

א. מה ההתפלגות של X .

אין מקום לטעם:
 4 אנשים צלילים עבבים עבבית על אחז: $P(X=0)=0$
 $P(X=3)=0$
 $P(X=2) = \frac{3}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{5}$
 $P(X=1) = 1 - P(X=2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
 $P(X=1) = \frac{3 \cdot 2^2}{\binom{6}{4}} = \frac{4}{5}$ (קחיתו על ונצית מכל על אחז)
 או אלטרנטיבית:
 קחיתו על ונצית מכל על אחז)

ב. מה התוחלת והשונות של X .

$$E(X) = \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$$

$$E(X^2) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

ג. מה התוחלת של מספר הנשים שיושבות ליד השולחן?

יש ארבעה מקומות ישיבה. לכל מקום יושבת אישה גם' 0.5.
 תוחלת הכנסה של האינדיקטורים שווה לכנסת תוחלתם והיא

$$4 \cdot 0.5 = 2$$

או דניק אחרת: כל אישה יושבת גם' $\frac{4}{6}$, יש 3 נשים ולכן תוחלת כנסה האינדיקטורים של הנשים היא $3 \cdot \frac{4}{6} = 2$

או דניק נוספת: מספר הנשים שיושבות מתפלל הפריבאומטורי. אפשר לראות את התוחלת עכ' הנוסחה לחישוב תוחלת של משתנה פריבאומטורי.

ד. אם נשים מזמינות ארוחה שעלותה 80 ש"ח, וגברים ארוחה שעלותה 100 ש"ח, מהן תוחלת ושונות עלות הארוחה לארבעת הסועדים?

י'פ' - X מספר הנשים בלילות.

י'פ' - Z עלות הארוחה.

$$Z = 80X + 100(4-X) = 400 - 20X$$

$$E(Z) = E(400 - 20X) = 400 - 20 \cdot E(X) = 400 - 20 \cdot 2 = 360$$

$$V(Z) = V(400 - 20X) = V(20X) = 400 \cdot V(X)$$

X משתנה בדיסקרטי. שונות X היא

$$4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \left(1 - \frac{4-1}{6-1}\right) = \frac{2}{5}$$

$$V(Z) = 400 \cdot \frac{2}{5} = 160$$

לכך

ה. דן ודנה הם אחד מהזוגות. יהי W משתנה מציין למאורע שדן נשאר במסעדה, ו- U משתנה מציין למאורע שדנה נשארה במסעדה. ו- U ו- W הם:

I. בלתי תלויים ובלתי מתואמים.

II. תלויים עם מתאם 0.

III. תלויים עם מתאם שלילי.

IV. תלויים עם מתאם חיובי.

אם X ו- Y משתנים בדיסקרטיים, אז X ו- Y הם תלויים אם $P(X=x, Y=y) \neq P(X=x) \cdot P(Y=y)$ עבור x ו- y כלשהם.

שאלה 3

במכללה מסוימת 70% מהסטודנטים הם גברים. התפלגות המשקל של הסטודנטים הגברים במכללה היא בקירוב נורמלית עם תוחלת 65 ק"ג וסטיית תקן 5 ק"ג. התפלגות המשקל של הסטודנטיות במכללה היא בקירוב נורמלית עם תוחלת 55 ק"ג וסטיית תקן 5 ק"ג.

א. מהו האחוזון ה-95 של משקל הסטודנטיות?

$$55 + \phi^{-1}(0.95) \cdot 5 = 55 + 1.645 \cdot 5 \approx 63.2$$

ב. בוחרים סטודנט באקראי (מין הסטודנט הנבחר לא ידוע). מה הסיכוי שמשקלו גבוה מ-60 ק"ג?

$$\begin{aligned} & 0.7 \cdot \left(1 - \phi\left(\frac{60-65}{5}\right)\right) + 0.3 \cdot \left(1 - \phi\left(\frac{60-55}{5}\right)\right) = \\ & = 0.7 \cdot \left(1 - \phi(-1)\right) + 0.3 \cdot \left(1 - \phi(1)\right) = \\ & = 0.7 \cdot \phi(1) + 0.3 - 0.3 \cdot \phi(1) = 0.3 + 0.4 \cdot \phi(1) = \\ & = 0.3 + 0.4 \cdot 0.8413 \approx 0.64 \end{aligned}$$

ג. המשקל של הסטודנט הנבחר גבוה מ-60 ק"ג. מה הסיכוי שזו סטודנטית?

סבבי נוסחת ג'וס:

$$\begin{aligned} & \frac{0.3 \left(1 - \phi\left(\frac{60-55}{5}\right)\right)}{0.7 \left(1 - \phi\left(\frac{60-65}{5}\right)\right) + 0.3 \left(1 - \phi\left(\frac{60-55}{5}\right)\right)} = \\ & = \frac{0.3(1 - 0.8413)}{0.64} \approx 0.074 \end{aligned}$$

ד. מה הסיכוי שבמדגם של 50 סטודנטיות, מספר הסטודנטיות שמשקלן גבוה מ-60 יהיה גדול מ-10?

כאשר $n=60$ ו- $p=0.159$ (מספר הסטודנטיות הנצמץ שמשקלן גבוה מ-60 מתפלג $B(60, 0.159)$).
 נחשבים את תוחמת $50 \cdot 0.159 \approx 7.95$ ונאונת $50 \cdot 0.159 \cdot 0.841 \approx 6.69$.
 כפי בקיורח:

$$\Phi\left(\frac{10.5 - 7.95}{\sqrt{6.69}}\right) = \dots$$

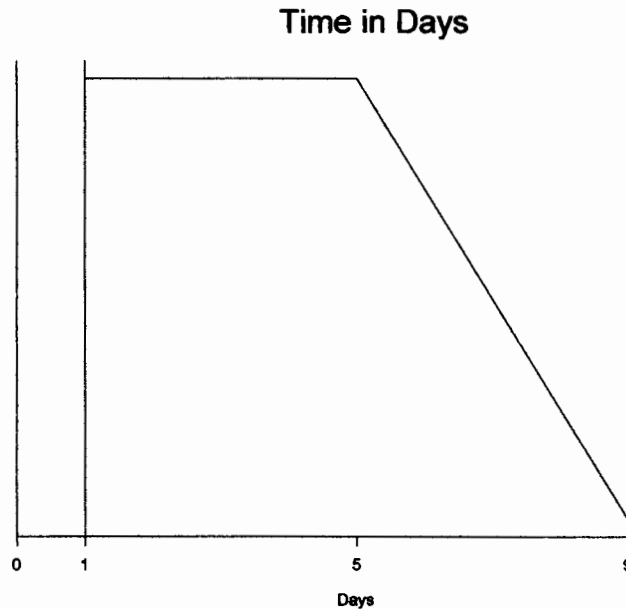
(האנו 10.5 ע"י תיקון רציפות, אם רואים 10 במקום 10.5 אז מקלים זאת צוק מסבקות.)

ה. באחד מהחוגים רוצים לראות מה התפלגות המשקל בקרב הסטודנטים שבחוג. לוקחים מדגם של 50 סטודנטיות. התפלגות המשקל שלהן בקירוב נורמלית עם ממוצע מדגמי של 56 ק"ג, וסטיית תקן מדגמית של 4 ק"ג. מצאו א.נ.מ לחציון משקל הסטודנטיות בחוג הזה. מהו האומדן.

אומצ נראות מכסימלי עברמטר מ פטא מחוצע
 פמצמ קהיתבלאת נוחמית החציון שורה
 עברמטר מ. עכן אומצ נראות מכסימלי
 עחציון פטא מחוצע פמצמ.

שאלה 4

זמן ביצוע עבודה סמינריונית (בימים נטו) מתפלג לפי הצפיפות:



א. סטודנט עבד יותר מ-5 ימים על העבודה. מה הסיכוי שעבד יותר מ-7 ימים?

אם a - אולי סבירות קטנה ק"ן 1 ו-0.5

$$a(5-1) + \frac{a(9-5)}{2} = 1 \implies a = \frac{1}{6}$$

$$P(X > 5) = 1 - a(5-1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X > 7) = \frac{\frac{a}{2} \cdot (9-7)}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X > 7 | X > 5) \stackrel{\text{ס"ק}}{=} \frac{P(X > 7, X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 7)}{P(X > 5)} = \frac{1}{4}$$

ב. מהו חציון של זמן ביצוע העבודה?

אם b - החציון, b קטן N 5 כי 5 38

פירוט: $\frac{1}{2} N$ גובה

$$(b-1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \implies b = 4$$

ג. מהן תוחלת ושונות זמן הביצוע ?

$$E(X) = \int_1^5 \frac{1}{6} X dx + \int_5^9 \frac{9-X}{4 \cdot 6} \cdot X dx = \left[\frac{1}{3} X^2 \right]_1^5 +$$

$$+ \left[\frac{9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot X^2 \right]_5^9 - \left[\frac{X^3}{3 \cdot 4 \cdot 6} \right]_5^9 = \dots$$

$$E(X^2) = \int_1^5 \frac{1}{6} X^2 dx + \int_5^9 \frac{9-X}{4 \cdot 6} \cdot X^2 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} X^3 \right]_1^5 + \left[\frac{9}{3 \cdot 4 \cdot 6} \cdot X^3 \right]_5^9 - \left[\frac{X^4}{4 \cdot 4 \cdot 6} \right]_5^9 = \dots$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

* הביטוי $\frac{9-X}{4 \cdot 6}$ הוא \int_5^9 כי X מקבלת ערך בין 5 ל-9

ד. מהן תוחלת ושונות זמן הביצוע הכולל של 100 סטודנטים שנבחרו באקראי ?

$$E(\text{sum}) = 100 \cdot E(X) = \dots$$

$$V(\text{sum}) = 100 \cdot V(X) = \dots$$

שונות של סכום משתנים קלמי תלויים שווה לסכום הפונקציה

ה. מה הסיכוי שמבין 100 הסטודנטים שנבחרו באקראי, זמן הביצוע הממוצע יהיה גבוה מ-4.5 ימים?

התמוצת של 100 זכרונות מ-4.5 א"מ הסכום של 450 מ-4.5 ימים, על מנת להקלות החישוב:

$$P(\text{sum} > 450) \approx 1 - \Phi\left(\frac{450 - E(\text{sum})}{\sqrt{V(\text{sum})}}\right) = \dots$$

ו. מה הסיכוי שמבין 100 הסטודנטים שנבחרו באקראי, 30 בדיוק יבצעו את המשימה בזמן העולה על 5 ימים? ניתן להשאיר כביטוי, בתנאי שפשטתם אותו.

אזלי סטודנטים 30 קבוצה פסבלי שילב את המשימה
 קצתן בעולה על 5 ימים פטל
 $1 - \frac{(5-1)}{2.6} = \frac{1}{3}$

בהסתברות פתוקסת פטל:

$$\binom{100}{30} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{70} = \dots$$