

### הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - בשני דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלאות של התפלגות נורמלית, התפלגות t והתפלגות חי בריבוע.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

**בהצלחה !**

שאלה 1 (30 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

רון הולך לקזינו ומהמר ברולטה שהתפלגות הרווח הנקי,  $X$  (בשקלים) למשחק בודד נתונה ע"י:

רווח	1	0	-2
הסתברות	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

ערכו של הפרמטר נקבע ע"י הקזינו, ואינו ידוע למשתתפים.

א. מצאו את תוחלת ושונות הרווח ב- 200 משחקים.

נתון את תוחלת ושונות הרווח במשחק בודד.

$$E(X) = \sum_k P(X=k) \cdot k = \theta^2 - 2(1-\theta)^2$$

$$E(X^2) = \sum_k P(X=k) \cdot k^2 = \theta^2 + 4(1-\theta)^2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \theta^2 + 4(1-\theta)^2 - (\theta^2 - 2(1-\theta)^2)^2$$

נניח  $R$  את הרווח ב- 200 משחקים.

$$R = X_1 + \dots + X_{200}$$

כאשר  $X_1, \dots, X_{200}$

הם תלויים ומתפלגים כמו  $X$ .

תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות, אם כן,

$$E(R) = E(X_1) + \dots + E(X_{200}) = 200[\theta^2 - 2(1-\theta)^2]$$

מכיון שהשתלשם הם זהים תלויים אז גם שונות הסכום שווה לסכום השונות:

$$\text{Var}(R) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_{200}) = 200[\theta^2 + 4(1-\theta)^2 + (\theta^2 - 2(1-\theta)^2)^2]$$

ב. אם  $\theta = 0.3$ : מה הסיכוי שב-200 משחקים, רון יצא ברווח?

ממשנה הדיקטום פתורתי  
אסן היסכני פטל

$$R \sim N(-178, 251)$$

$$P(R \geq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{178}{\sqrt{251}}\right) = 1 - \Phi(11.2) \approx 0$$

ג. אם  $\theta = 0.3$ : מה הסיכוי שמתוך 200 משחקים, רון יפסיד (רווח = -2) ביותר ממאה משחקים?

נסמן  $X \geq$  אית מספר ההפסדים  
קירח לוחם:  $X \sim N(98, 200 \cdot 0.49 \cdot 0.51)$

$$P(X \geq 100) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{200 \cdot 0.49 \cdot 0.51}}\right) = 1 - \Phi(0.28) \approx 0.39$$

ד. רון רוצה לאמוד את הפרמטר על סמך  $n$  משחקים. הוא מנהל מעקב ורואה שהרוויח שקל ב- $R$  משחקים והפסיד 2 ש"ח ב- $L$  משחקים. בשאר המשחקים הוא לא הרוויח ולא הפסיד. מצאו אומד נראות מקסימאלי ל- $\theta$ . מהו האומדן אם שיחק 200 משחקים מהם הרוויח שקל ב-50 והפסיד 2 ש"ח ב-70?

בנקצית הליחות:

$$\alpha(\theta) = \theta^{2R} [2\theta(1-\theta)]^{n-R-L} \cdot (1-\theta)^{2L} \cdot \text{קבוע}$$

$$\ln \alpha(\theta) = (n+R-L) \cdot \ln(\theta) + (n-R+L) \cdot \ln(1-\theta) + \text{קבוע}$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln \alpha(\theta) = \frac{n+R-L}{\theta} - \frac{n-R+L}{1-\theta}$$

slc  $\theta_0 = \frac{h+R-L}{2h}$  פה נקזת אקטיוואס עלור

$\theta < \theta_0$  פנצרת חלוקת (מוקצה עולה) ואלור פים

פנצרת שלילית, אכן  $\theta_0$  פה נקזת פאסיבואס,

מסקנה  $\hat{\theta} = \frac{h+R-L}{2h}$  :

פאלן פה:  $\frac{200+50-70}{400} = \frac{9}{20}$

ה. מצא אנמ לסיכוי לרווח של שקל במשחק בודד.

אם - פ' משל האמז נאלת מביטאל' של פוקצה  
פה פמוקצה של האמז נאלת מביטאל' נקזת

e  $\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2 = \left(\frac{h+R-L}{2h}\right)^2$

שאלה 2 (39 נקודות – סעיפים א – ג 6 נקודות כל אחד. השאר 7 נקודות)

במועדון קליעה למטרה, שחקנים יורים חיצים למטרה עגולה בעלת רדיוס של 15 ס"מ. השחקנים תמיד פוגעים במטרה. כל הטלת חץ עולה 5 ש. אם הפגיעה היא במרחק קטן מ-5 ס"מ מהמרכז מקבלים בחזרה 10 ש. אם השחקנים לא מיומנים אז המיקום על המטרה אקראי. יהי  $D$  מרחק הפגיעה מהמרכז. עבור סעיפים א – ד הניחו כי משחקים שחקנים לא מיומנים. א. מצאו תוחלת ושונות מרחק פגיעה מהמרכז.

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{15^2} & 0 < x \leq 15 \\ 1 & 15 < x \end{cases}$$

$$f_D(x) = \begin{cases} \frac{2}{15^2} x & 0 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{מח} \end{cases}$$

pdf

$$E(D) = \frac{2}{15^2} \int_0^{15} x^2 dx = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10$$

$$E(D^2) = \frac{2}{15^2} \cdot \frac{15^4}{4} = \frac{15^2}{2}$$

$$\text{Var}(D) = \frac{15^2}{2} - 10^2 = 12.5$$

ב. מהי תוחלת הרווח ממשחק בודד.

ג'מט'  $\frac{5^2}{15^2}$  יש צב'ה ק כו שקלים, קל'ה אק'ה יש שקל'ה  
 א 5 שקלים, תחלת'ה ה'ו'ה ה'ט'

$$\frac{5^2}{15^2} \cdot 10 - 5 = -3\frac{8}{9}$$

ג. נתון שצחי פגע במרחק קטן מ-7 ס"מ. מה הסיכוי שהוא קיבל 10 ש' בחזרה?

ק' צ'ה:  $\frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$  א'  $\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^2}$   
 א' ה'ת'ה ה'ט' א'ת'ה.

ד. בקבוצה מסוימת 20 שחקנים. כל אחד קולע חץ אחד. מה הסיכוי שיחד הם יפסידו 70 ש' בדיוק?

3 כ'ש א'ה'ו' 37 צ'וק 3 ה'צ'ח'ה.

$$\binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{17} \approx 0.21$$

(ס'כ'ו" ה'ה'צ'ח'ה ק'פ'ע'ם ק'ז'צ'ת' ה'ס'  $\frac{5^2}{15^2}$ )

ה. 40% מהבאים למועדון הם שחקנים לא מיומנים והשאר מיומנים. הסיכוי ששחקן מיומן יקבל 10 שו בחזרה הוא 0.75. ליאת קבלה 10 שו חזרה. מה הסיכוי שהיא שחקנית מיומנת?

לפי נוסחת ההסתברות המותנה, הסכום הפיננסי:

$$\frac{(1-0.4) \cdot 0.75}{0.4 \cdot \frac{1}{9} + (1-0.4) \cdot 0.75} \approx 0.91$$

ו. נרצה לבדוק את הטענה שעבור שחקנים לא מיומנים המיקום על המטרה הוא אקראי תוך שימוש במדגם של 50 שחקנים. נסחו השערה ובדקו ברמת מובהקות של 5% אם נתונות התוצאות:

מרחק	0-5	5-8	8-12	12-15
שכיחות	8	12	15	15

נשתמש בדיקת  $\chi^2$  לט"ק ההתאמה.

השכיחות	הצפוי	של הקלטה	הצפוי	היא
השכיחות	הצפוי	של הקלטה	הצפוי	היא
השכיחות	הצפוי	של הקלטה	הצפוי	היא
השכיחות	הצפוי	של הקלטה	הצפוי	היא

$\chi^2 = 3.29$  מתקבל  
 $\chi^2_{3, 0.95} = 7.81$  מהטבלה  
 $\chi^2 < \chi^2_{3, 0.95}$  אכן לא סביר  
 אקראי:  $M_0$ , אלא אקראי:  $M_1$   
 אכן לא סביר  
 אכן לא סביר

שאלה 3 (18 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

למוקד טלפוני של חברת ביטוח מגיעים טלפונים עם בקשות להצעות מחיר לביטוח (לרכב, דירה וכ"ו) בקצב של 50 שיחות לשעה, וטלפונים בנושאי תביעות בקצב של 30 שיחות לשעה. משך השירות מתפלג מעריכית כאשר הסיכוי שהשירות יעלה על 15 דקות הוא 0.25 עבור הצעות מחיר, ועבור תביעות הסיכוי שהשיחה תעלה על 15 דקות הוא 0.8. ניתן להניח אי תלות בין זמני הגעה ומשכי שירות של לקוחות שונים.

א. בין השעה 8 ל-9 בבוקר הגיעו 85 שיחות. מה הסיכוי ש-40 מתוכן היו בנושאי תביעות? אין צורך להגיע למספר, אך יש להגיע לביטוי פשוט.

$$\binom{85}{40} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{40} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{45}$$

(כל ש'חה שפ'י'ע פ'יא קס'כו'  $\frac{30}{30+50}$  קנלא תנ'ע'ת)

ב. מוקדן שירת 4 לקוחות בנושאי תביעות ול-5 לקוחות נתן הצעות מחיר. מהי תוחלת זמן השירות הכולל של 9 לקוחות כאלו?

נחג את הפרימטלים של ההתפלגות המעריכית.

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$

נקודת שתחמת זמן הפ'י'ת של אקוה פ'טא קנלא תנ'ע'ת פ'טא  $\frac{15}{\ln(4)}$  ושל אקוה פ'טא קנלא פ'ל'ע'ג מ'ל'ר פ'טא

אם תחמת הפ'טלים ה'אן פ'טא:  $\frac{15}{\ln(\frac{10}{8})}$

$$4 \cdot \left(\frac{15}{\ln(4)}\right) + 5 \cdot \left(\frac{15}{\ln(\frac{10}{8})}\right)$$



ג. חמישה מוקדנים מתחילים לתת שירות בתשע בבוקר בדיוק. שניים מהם: אסף ויוני נותנים שירות לתביעות. רונית, יעל ומירב נותנות הצעות מחיר. מה הסיכוי שבשעה 9 ו-17 דקות כולם עדיין נותנים שרות?

$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$

לשמש כצורה  $\lambda$   
 ברמטר ה  $\lambda$  וצורה  
 נקודת הסתברות

משנה הסיוות של אקולות שונים הם קצרי האיום.

$$\left(4 - \frac{17}{15}\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{10}{8}\right) - \frac{17}{15}\right)^2$$

שאלה 4 (18 נקודות - כל סעיף 6 נקודות)

בבניין משותף 10 קומות, ובכל קומה 4 דירות. משפחת לוי גרה בדיוק מעל משפחת כהן, והן מסוכסכות ביניהן. באסיפת הדיירים שתיערך היום ייבחרו, באקראי, נציגים מ-5 דירות. א. מה הסיכוי שלוועד יבחר נציג של משפחת כהן ונציג של משפחת לוי? (משפחת כהן חוששת מאפשרות זו).

$$P(\text{נציג של כהן} | \text{נציג של לוי}) = \frac{P(\text{נציג של לוי} \cap \text{נציג של כהן})}{P(\text{נציג של לוי})} = \frac{\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39}}{\frac{4}{40}} = \frac{1}{39}$$

צ'ק ג'יה:  $\frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{5}}$  מנבוי מספר הנציגים שלגורם 3 צ'קות קונסלס  
מנבוי מספר הנציגים שלגורם 5 צ'קות.

ב. יהי Y מספר הנציגים שנבחרו מקומה 10 (קומת הגג שלהם הכי הרבה בעיות). מהי השונות של Y?

צ'ק ג'יה:  $\frac{\text{מתאמה יק אם נאמצה בהתפלגות ההיפרגאומטרית}}{\text{ונלמדת השונות שלה}}$

$$\text{Var}(Y) = 5 \cdot \frac{4}{4+36} \cdot \frac{36}{4+36} \cdot \left(1 - \frac{5-1}{40-1}\right)$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

צ'ק ג'יה:   
 ג'יה:

$$E(Y) = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{40}{5}} \cdot 0 + \frac{\binom{36}{4} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{40}{5}} \cdot 1 + \frac{\binom{36}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{40}{5}} \cdot 2 + \frac{\binom{36}{2} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{40}{5}} \cdot 3 + \frac{\binom{36}{1} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{40}{5}} \cdot 4 = 0.5$$

$$E(Y^2) = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{40}{5}} \cdot 0^2 + \frac{\binom{36}{4} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{40}{5}} \cdot 1^2 + \frac{\binom{36}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{40}{5}} \cdot 2^2 + \frac{\binom{36}{2} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{40}{5}} \cdot 3^2 + \frac{\binom{36}{1} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{40}{5}} \cdot 4^2$$

ג. מר לוי שירת בשנה האחרונה בוועד, ולמשפחת כהן אין נציג. לצורך המשכיות טפול בבעיות, הוצעה הצעה שבועד החדש יכהנו 2 נציגים שיבחרו באקראי מהוועד הישן, ושלושה חדשים. לאור הסכסוך עם משפחת לוי, משפחת כהן מתלבטת אם ההצעה עדיפה על פני בחירה אקראית של חברי ועד. מה תמליץ למשפחת כהן ומדוע?

כוללת הפאלה היא קא'צו שיטה יש סכ' קטן יותר  
 אישפחת כ'ק ואשפחת א'ו 'פ'ו שת'קן קא'צו. הפס'ו  
 שבה 'קיה קדחרה אקס'ו' הפ'ו א'ב' סג'ו' א' 1/78  
 נחש את הפס'ו שיטה החזרה:

צ'ק א' : מתקצרות שתי הפס'ו' קלתי תל'ו'ת.

$$P\left(\begin{matrix} \text{כ'ק} \\ \text{א'ב' סג'ו' א'} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \text{קא'צו} \\ \text{קא'צו} \end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix} \text{כ'ק} \\ \text{קא'צו} \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{א'ב' סג'ו' א'} \\ \text{קא'צו} \end{matrix}\right) = \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{175}$$

$$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{34}{2}}{\binom{5}{2} \cdot \binom{35}{3}}$$

צ'ק ג' :

מורה: מספר האפשרויות א'ג'ור נ'צ'ו' מהפ'ו'צ' הפ'ו' (קטל' א'ו')  
 א'ט' נ'צ'ו' חז'ט' (קטל' א'ב'ו')  
 מ'כ'ה' מס'ר האפשרויות א'ג'ור ש'נ' נ'צ'ו' מהפ'ו'צ' הפ'ו' יא'ט'ו'ה  
 נ'צ'ו' חז'ט' 14