

מועד א', סמסטר ב', תשס"ה,  
תאריך הבחינה: 27.6.05  
משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת תל אביב  
הפקולטה למדעים מדויקים  
בית הספר לפיזיקה

### הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - בשני דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105 , אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- בסוף גליון הבחינה ישנם מספר דפי טיוטה.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

**בהצלחה !**

שאלה 1 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)  
 בכיתה 20 בנים ו-20 בנות. בוחרים ועד כיתה בן 5 תלמידים באקראי (סדר אינו חשוב).

א. מה הסיכוי שגיא ייבחר?  $\frac{5}{40}$  או  $\frac{5}{40}$

$$\frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{39}{4}}{\binom{40}{5}} = \frac{5}{40}$$

ב. יהי X משתנה מציון המקבל ערך 1 אם גיא נבחר ו-Y משתנה מציון המקבל ערך 1 אם עידו נבחר. מהו מקדם המתאם בין X ו-Y?

$$V(Y) = V(X) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{40}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \\ &= \frac{5}{40} \cdot \frac{4}{39} - \frac{5}{40} \cdot \frac{5}{40} \end{aligned}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

מקדם המתאם הוא שלילי כי אם גיא יבחר אז עידו יבחר  
 כפי ש'13 יבחר.

ג. מה הסיכוי שייבחרו לפחות 2 בנות?

$$1 - \frac{\binom{20}{0} \binom{20}{5}}{\binom{40}{5}} - \frac{\binom{20}{1} \binom{20}{4}}{\binom{40}{5}}$$

מספר הקלות הנקחות מתבאם הבינאומטרית.  
 הפסתגרות שאי נבחר אלף בת אחת היא  $\frac{\binom{20}{0} \binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}$   
 הפסתגרות שתבחר בת אחת היא  $\frac{\binom{20}{1} \binom{20}{4}}{\binom{40}{5}}$

ד. מהי תוחלת מספר הבנות שייבחרו?

כל בת נבחרת בסבוי  $\frac{5}{40}$ . תוחלת האינצ'קטור של  
 בחירת בת מסוימת הוא  $\frac{5}{40}$ . אם תוחלת סכום האינצ'קטורים  
 היא  $20 \cdot \frac{5}{40}$ .

הסדר נוסף: כל נבחר היא גם בסבוי  $\frac{20}{40}$ . תוחלת סכום  
 האינצ'קטורים של פנתחים פשוטים (אינצ'קטורים של היותן  
 בת) היא  $5 \cdot \frac{20}{40}$ .

הסדר נוסף: מספר הקנות הנקחות מתבאם הבינאומטרית.  
 אבי העמסא אמיאק תוחלת של משתנה הבינאומטרי,  
 התוחלת היא  $5 \cdot \frac{20}{40}$ .

שאלה 2 (26 נקודות: סעיף א - 6; ב - 8; ג - 12)

$X_1, \dots, X_n$  מתפלגים לפי ההתפלגות הנורמלית עם תוחלת  $\mu$  וסטטיית תקן  $\sigma$ . מקדם המתאם בין כל שניים מהם הוא  $\rho$ . נגדיר  $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$ .

א. עבור  $n=2$ : מהם  $E(\bar{X})$  ו- $Var(\bar{X})$ ?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{E(X_1) + E(X_2)}{2} = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_2)}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{4} (6^2 + 6^2 + 2\rho \cdot \sqrt{V(X_1)V(X_2)}) = (2 \cdot 6^2 + 2\rho \cdot 6^2) / 4$$

ב. עבור  $n=3$ :

i. מהם  $E(\bar{X})$  ו- $Var(\bar{X})$ ?

$$E(\bar{X}) = \frac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_2) + 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_3) + 2 \cdot \text{cov}(X_2, X_3)}{3^2} =$$

$$= \frac{1}{9} (3 \cdot 6^2 + 6 \cdot \rho \cdot 6^2)$$

ii. מהו טווח הערכים האפשרי ל- $\rho$  במקרה זה?

אננת של משתנה חיידת לרבות או שלילית ל- $\rho$

$$3 \cdot 6^2 + 6 \cdot \rho \cdot 6^2 \geq 0 \implies 3 \cdot 6^2 (1 + 2\rho) \geq 0 \implies \rho \geq -0.5$$

קנוסל תמ'3  $\rho \leq 1$  ואם מנ'חם שבהתבטאות המשוגבת  
 (כ'א רב נורמל'ת אלס  $\rho < 1$ .)

ג. נגדיר מ"מ חדש:  $Y = \rho X_1 - X_2$ . עבור  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 1$ :  
 i. חשבו  $P(X_1 + Y > 2)$ .

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, Y) &= \text{cov}(X_1, \rho X_1 - X_2) = \rho \cdot \text{cov}(X_1, X_1) - \text{cov}(X_1, X_2) = \\ &= \rho \cdot V(X_1) - \text{cov}(X_1, X_2) = \rho \cdot 1^2 - \rho \cdot 1^2 = 0 \end{aligned}$$

אם  $X_1$  ו- $Y$  לתיבת התאמה. ושתיהן נורמליות לתיבת התאמה. הם גם לתיבת תלכיון וסכומן מתפלג לנורמלית עם תלכיות ששורה לסכום התלכיות ושונות ששורה לסכום (פשוטות).

$$E(X_1 + Y) = E(X_1 + 0.5X_1 - X_2) = 0.5$$

$$\begin{aligned} V(X_1 + Y) &= V(X_1) + V(Y) = V(X_1) + V(0.5X_1 - X_2) = \\ &= V(X_1) + 0.5^2 V(X_1) + V(X_2) - \text{cov}(X_1, X_2) = 2.25 - 0.5 \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

$$P(X_1 + Y > 2) = \Phi\left(\frac{2 - 0.5}{\sqrt{1.75}}\right) \approx 0.872$$

ii. חשבו  $P(X_1 > 1 | Y > 1)$ .

מכיון ש- $X_1$  ו- $Y$  לתיבת תלכיון אז בהסתברות  
 (בהתנב) ששורה לסכומן  $(X_1 > 1)$ .

$$\Phi\left(\frac{1 - 1}{\sigma^2}\right) = 0.5$$

שאלה 3 (31 נקודות - סעיף ב - 7 נקודות והשאר 6 נקודות כל אחד)

בקורס לתואר שני הציון ניתן על סמך עבודה. הסטודנטים צריכים להגיש את העבודה במהלך חודש יולי. נניח שהסטודנטים עובדים ומגישים את העבודות באופן ב"ת אחד מהשני. המרצה מנהל מעקב על זמן ההגשה והציון של כל סטודנט שלמד אצלו, והוא שם לב שזמני ההגשה מתפלגים לפי הצפיפות

$$f(x) = r(r+1)(1-x)^{r-1}x \quad 0 < x < 1$$

כאשר  $r$  פרמטר שמקבל ערכים שלמים חיוביים.  $x$  הוא זמן ההגשה במהלך החודש.

א. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת? מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת?  
 ,  $x < 0$  אלקר  $F(x) = 0$   
 :  $0 \leq x \leq 1$  אלקר  $F(x) = 1$   
 ,  $x > 1$  אלקר  $F(x) = 1$

$$F(x) = \int_0^x r(r+1) \cdot (1-t)^{r-1} x dt - (r+1) \cdot (1-t)^r \cdot t \Big|_0^x + \int_0^x (r+1) \cdot (1-t)^r dt = -(r+1)(1-x)^r \cdot x - [(1+t)^{r+1}]_0^x = -(r+1)(1-x)^r x - (1-x)^{r+1} + 1$$

על הסעיפים הבאים ענו עם  $r = 2$ .

ב. מהן תוחלת ושונות זמן ההגשה?

$$E(x) = \int_0^1 2 \cdot 3 \cdot (1-x) \cdot x \cdot x dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 6 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 0.5$$

$$(E(x))^2 = 0.5^2 = 0.25$$

$$E(x^2) = \int_0^1 2 \cdot 3 \cdot (1-x) \cdot x^3 dx = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 0.3$$

$$V(x) = 0.3 - 0.25 = 0.05$$

ג. בסמטר מסוים למדו 10 סטודנטים. מה הסיכוי שבדיוק 4 מתוכם יגישו במחצית הראשונה של החודש?

אלו קלפים מסוגים הסמל עש"ש לחצית הסלונה פתא:

$$F(0,5) = -3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 - 0,5^3 + 1 = 0,5$$

וההסתברות פתקית היא  $(\binom{12}{4}) \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^6$

ד. המרצה מלמד את הקורס שנים רבות. מה הסיכוי שממוצע זמן ההגשה של 100 סטודנטים יהיה קטן מ-0.55?

הממוצע מתפלג קריח נורמלי:

$$\Phi\left(\frac{0,55-0,5}{\sqrt{\frac{0,05}{100}}}\right) \approx \Phi(2,236) \approx 0,987$$

ה. נמצא כי מבין הסטודנטים שמגישים את העבודה ברבע הראשון של החודש 20% מקבלים ציון מעל 80. מבין הסטודנטים שלא מגישים את העבודה ברבע הראשון של החודש 40% מקבלים ציון מעל 80. מה הסיכוי שסטודנט שנבחר באקראי קיבל ציון מעל 80?

הסמל פתא

$$F(0,25) \cdot 0,2 + (1 - F(0,25)) \cdot 0,4$$

כאן

$$F(0,25) = -3 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 - 0,75^3 + 1 = \frac{10}{64}$$

שאלה 4 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

מספר הודעות SMS בנושאים אישיים שסטודנט מקבל ביום מתפלג לפי תהליך פואסון עם תוחלת 10. כמו-כן הוא מקבל הודעות SMS שקשורות ללימודים לפי תהליך פואסון עם תוחלת 5. מספר ההודעות האישיות ובנושאי לימודים ב"ת.

א. הסטודנט יצא למילואים לשלושה ימים, ושכח את הטלפון הסלולרי בבית. מה הסיכוי שיצטברו 42 הודעות? אין צורך לתת מספר, אך עליכם לפשט את הביטוי ככל האפשר ולא להשאיר סכומים.

כמים של מספרים פואסונים קצתו תלויים מתפלג פואסון עם פרמטר שווה לסכום הפרמטרים. אם מספר ההודעות השוליות ש'קבל ג' ימים מתפלג פואסון עם פרמטר הכולל (10+5+10+5+10+5) או  $P(45)$ .  
 אם ההסתברות הנלקחת היא  $\frac{e^{-45} \cdot 45^{42}}{42!}$ .  
 נתון:  $X \sim P(\lambda)$ ,  $Y \sim P(\mu)$ ,  $Z = X + Y$  כאשר  $Z \sim P(\lambda + \mu)$ .  
 מה הסיכוי שבכל אחד משלושת הימים הגיעו לפחות 2 הודעות בנושאי הלימודים?

$$P(Z=h) = \sum_{k=0}^h P(X=k, Y=h-k) = \sum_{k=0}^h P(X=k) \cdot P(Y=h-k) = \sum_{k=0}^h e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{h-k}}{(h-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{h!} \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \lambda^k \mu^{h-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^h}{h!}$$

$$\left(1 - e^{-5} - \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!}\right)^3$$

הסתברות:  $e^{-5} + \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!}$  זאת ההסתברות של 0 או 1 הודעות.  
 קצת פחות י"א 0 או 1 הודעות.



ג. אם ביום הראשון הגיעו 12 הודעות, מה הסיכוי ש-4 מתוכן הן בנושאי לימודים?

ההתפלגות המאוחדת של מספר ההצבעות קנואל אינדיקס  
כ"א  $\beta(12, \frac{5}{10+5})$ .

$$P = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^8$$

כ"ב

ד. מהי תוחלת הזמן ביום בו הגיעה ההודעה הראשונה בנושאים לימודיים?

זמן הציפה ארוכה מתפלג מערכות עם  
תוחלת של  $\frac{1}{5}$  י"ס.