

פתרון לבחינה מ 08.02.26

שאלה 1

התשובה היא ג'.

יש שמונה מקומות שבהם יכול להתחיל רצף של שניים. מספר הרצפים שווה לסכום של שמונה אינדיקטורים. אם יש אי תלות בזוגות אז בזוג מסוים יש שתי הצלחות בסיכוי $0.25 = 0.5 \cdot 0.5$. לשם כך לא נדרשת הנחת אי תלות כללית. תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות גם אם יש תלות בין זוגות שונים.

במקרה זה תוחלת מספר הרצפים שווה ל $8 \cdot 0.25 = 2$.

ללא הנחת האי תלות בזוגות, לא ניתן לחשב את ההסתברות שזוג מסוים הוא רצף. נתן דוגמא שבה התוחלת היא שונה מזו שמתקבלת כאשר יש אי תלות בזוגות. ללא הנחה זו, אפשרי למשל שבסיכוי חצי יופיעו עצים בכל המקומות הזוגיים, ולא יופיעו עצים במקומות האי זוגיים, ובסיכוי חצי יופיעו עצים בכל המקומות האי זוגיים ולא יופיעו עצים במקומות הזוגיים. במקרה זה כל הטלה היא הצלחה בסיכוי חצי. אבל לא יכולים להיות רצפים. כך במקרה זה תוחלת מספר הרצפים היא אפס.

שאלה 2

התשובה היא ב'.

ההסתברות היא $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{6}$ (ששניהם לא גדולים מחמש, אך לא ששניהם קטנים מחמש).

הערות

צריך שלפחות משתנה אחד יקבל את הערך חמש. צריך שהאחר יקבל ערך שלא גדול מחמש. צריך להבטיח שהאחר לא יקבל ערך גדול מחמש. יש אפשרות ששניהם יקבלו את הערך חמש.

שאלה 3

התשובה היא ג'.

כדי שהסכום יהיה שווה לאפס, צריך ששני המשתנים יקבלו ערך של אפס. ההסתברות המכסימלית שיכולה להיות היא 0.5^3 . כשיש תלות מתאימה, יתכן שבכל מקרה ש X מקבל ערך של אפס, אז גם Y מקבל ערך של אפס. לא יתכן שבכל מקרה ש Y מקבל ערך של אפס, גם X מקבל ערך של אפס (כי ל Y יש הסתברות גדולה יותר לקבל את הערך אפס).

הערות

שימו לב שלא נתון שהמשתנים ב"ת. יש אפשרויות שונות לבנות את ההתפלגות המשותפת.

שאלה 4

התשובה היא ד'.

המשתנה Z הוא מנוון (תמיד מקבל את הערך אחד). לכן שונות הסכום שווה לשונות הסכום של שני האחרים. שני האחרים בכל מקרה מקבלים את אותו ערך. לכן השונות שווה לשונות של $2Y$ ששווה ל $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^2$. (Y הוא אינדיקטור).

הערות

למעשה הסכום מקבל את הערך שלוש בסיכוי שני שליש ואת הערך אחד בסיכוי שליש.

לכן השונות שלו היא $\left[\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right]^2 - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{2}{3} \cdot 3^2 \right]$.

שאלה 5

התשובה היא ד'.

יתכן שבכל מקרה משתנה אחד מקבל את הערך אחד, משתנה אחד מקבל את הערך שתיים, ומשתנה אחד מקבל את הערך שלוש, כאשר כל 3! הפרמוטציות הן שוות הסתברות. במקרה כזה כל אחד מהם מתפלג אחיד והסכום שלהם הוא קבוע. המשתנה X אינו מנוון ולכן השונות שלו אינה שווה לאפס (יש סטיות מהתוחלת). יתכן שהסכום של שני משתנים הוא קבוע וגם יתכן שהסכום של שלושה משתנים הוא קבוע. אבל לא יתכן ששני הדברים יתרחשו סימולטנית, כי הצירוף של שניהם אומר ש Z הוא קבוע (Z הוא ההפרש בין שני הסכומים).

שאלה 6

התשובה היא א'.

מדובר בסדרת משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות שכל אחד מהם מקבל כל אחד מחמישה ערכים אפשריים בסיכוי חמישית. המומנט הרביעי שלהם קטן מ 6^4 שהוא כמובן גודל סופי.

ההתפלגות הגבולית של סדרת משתנים שווי התפלגות היא ההתפלגות של כל אחד מהמשתנים.

הערות

בהינתן שמשתנה לא מקבל את הערך חמש, הוא מקבל את כל אחד מחמשת הערכים האחרים בסיכוי שווה. כל אחד מהמשתנים שלא מקבלים את הערך חמש, מקבל את כל אחד מחמשת הערכים האחרים באופן ב"ת במשתנים האחרים. הערך הכי גדול שיכול להתקבל הוא שש. לכן המומנט הרביעי לא יכול להיות גדול מ 6^4 . מסתמכים על משפט שהוכחנו בהרצאה, שעל סדרת משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות ובעל מומנט רביע סופי, חל החוק החזק.

שאלה 7

התשובה היא א'.

לפי אי שיוויון מרקוב, ההסתברות שהמשתנה גדול או שווה לעשרים היא קטנה או שווה לרבע. אבל כאן מדובר בהסתברות שהמשתנה גדול ממש מעשרים. אם משתנה אי שלילי הוא גדול ממש מעשרים בסיכוי רבע, אז בהכרח התוחלת גדולה ממש. נניח בשלילה שההסתברות לקבל ערך גדול מעשרים היא גדולה או שווה לרבע. מתקבל

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_k P(X=k)k = \sum_{0 \leq k \leq 20} P(X=k)k + \sum_{k>20} P(X=k)k \geq \\
&\geq \sum_{0 \leq k \leq 20} P(X=k) \cdot 0 + \sum_{k>20} P(X=k)k > \sum_{k>20} P(X=k) \cdot 20 = \\
&= 20 \sum_{k>20} P(X=k) = 20P(X > 20) \geq 20 \cdot \frac{1}{4} = 5
\end{aligned}$$

קבלנו שהנחה זו מובילה לכך ש $E(X) > 5$. זו סתירה.

הערות

לא נתון ערך של השונות. לכן אי אפשר להשתמש באי שיוויון צ'בישב.
אם משתנה מקבל ערך גדול מ-20, זה לא אומר שהוא מקבל ערך גדול או שווה ל-21.
משתנה רציף וגם משתנה בדיד יכולים לקבל ערך לא שלם.

שאלה 8

התשובה היא ד'.

הסתכלו על משתנה בדיד שמקבל את הערך אחד בסיכוי שני שליש ואת הערך אפס בסיכוי שליש. יש למשתנה זה חציון יחיד ששווה לאחד. התוחלת שלו שווה לשני שליש.
משתנה נורמלי הוא סימטרי סביב תוחלתו, ולכן החציון שלו שווה לתוחלת שלו.

שאלה 9

התשובה היא ה' (עשרים ושליש).

בהינתן שהמשתנה מקבל ערך של עשרים או של עשרים ואחד, הוא מקבל את הערך עשרים בסיכוי שני שליש ואת הערך עשרים ואחד בסיכוי שליש. מתקיים

$$P(X = 20 | 20 \leq X \leq 21) = \frac{P(X = 20)}{P(X = 20) + P(X = 21)} = \frac{0.5 \cdot 0.5^{19}}{0.5 \cdot 0.5^{19} + 0.5 \cdot 0.5^{20}}$$

הערה

תשובה סופית חייבת להיות סבירה. אם נתון שמשתנה מקבל רק ערכים בתחום מסוים, אז התוחלת חייבת להיות בתחום זה.

שאלה 10

התשובה היא ב'.

צריך לצבור שלוש תוצאות של שתיים או שתיים וחצי, ולא משנה אם הן שתיים או שתיים וחצי. ההתפלגות היא $NB\left(3, \frac{2}{3}\right)$.

הערה מחכים לשלוש הצלחות בסדרת נסיונות ב"ת ושווי הסתברות.

שאלה 11

ההסתברות היא חצי. המשתנה X מקבל ערך זוגי (אפס או שתיים) בסיכוי חצי. עבור כל ערך שמקבל המשתנה Y , הוא משלים אותו לערך זוגי בסיכוי חצי.

הערות

המשתנה X עצמו הוא סכום של שני אינדיקטורים ב"ת בעלי הסתברות חצי. הוא מקבל ערך זוגי בסיכוי חצי, בגלל שהאינדיקטור השני בכל מקרה משלים את הראשון לסכום זוגי בסיכוי חצי. אם רוצים להתבסס על חישוב ההתפלגות של X אז מקבלים ש

$$P(X = 0) + P(X = 2) = (1 - 0.5)^2 + 0.5^2 = 0.5$$
