

פתרון לבחינה מ 25.04.25

שאלה 1

תשובה: ד

בסיכוי חצי מיקום הנקודה מתפלג אחיד בין אפס לאחד, ובסיכוי חצי מיקום הנקודה מתפלג אחיד בין אחד לשניים. במקרה הראשון תוחלת המרחק לשניים הוא אחד וחצי, ובמקרה השני תוחלת המרחק לאפס היא אחד וחצי.

שאלה 2

תשובה: ב

הסיכוי לקבל פעם אחת שש הוא $\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}$. אחרת לא מקבלים אף תוצאת שש. התוחלת של אינדיקטור שווה לפרמטר שלו.

הערה

זו גם ההסתברות שבשתי הטלות נקבל לפחות פעם אחת שש. אין צורך להסתכל על ההטלה השניה, אם בראשונה כבר קיבלנו שש.

שאלה 3

תשובה: ג

ידוע שלאחר שנה אחת יש מכשיר תקין. התפלגות זמן החיים של מכשיר היא חסרת זכרון. לכן תוחלת הזמן שיהיה מכשיר תקין לאחר שנה אחת שווה לתוחלת של משתנה מעריכי בעל פרמטר אחד.

שאלה 4

תשובה: ב (בקירוב אחד ושלושה רבעים)

בסיכוי רבע יהיה מסלול ישיר באורך אחד בין שני הצמתים. אם לא, אז בהסתברות קרובה לאחד יהיה מסלול באורך שניים שעובר בצומת מתווכת. כל צומת היא מתווכת באמצעות שתי קשתות במשקל אחד בסיכוי $\frac{1}{16} = 0.25 \cdot 0.25$. אף צומת היא לא מתווכת באמצעות קשתות במשקל אחד, בסיכוי $\left(1 - \frac{1}{16}\right)^{998}$ שזה סיכוי אפסי.

שאלה 5

תשובה: א

שני האי שיויונים מתרחשים למשל לגבי משתנה מנוון שמקבל את הערך חצי בסיכוי אחד. כך התוחלת של הרבוע היא רבע, התוחלת של החזקה השלישית היא שמינית והתוחלת של החזקה הרביעית היא אחד חלקי שש עשרה.

שאלה 6

תשובה: ה

ניתן לדעת את ההתפלגות. כאשר ניתן לדעת את ההתפלגות אז ניתן לדעת גם מהם ערכי התוחלת והשונות.

אם מתקיים $(X = x)$, אז למשל ההסתברות לשני כדורים כחולים היא $\frac{x(x-1)}{100 \cdot 99}$, וההסתברות

לכדור כחול אחד היא $\frac{2x(100-x)}{100 \cdot 99}$. כך למשל ההסתברות לשני כדורים כחולים היא

$$\sum_{k=2}^{100} P(X = x) \frac{x(x-1)}{100 \cdot 99} = \frac{E(X(X-1))}{100 \cdot 99} = \frac{E(X^2) - E(X)}{100 \cdot 99}$$

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X)$$

אם X מקבל את הערכים אחד או שתיים, אז בודאות לא יהיו שני כדורים כחולים.

שאלה 7

תשובה: א (6.2)

דרך ראשונה

לאחר ההטלה הראשונה מקבלים בסיכוי חמש שישיות משתנה גיאומטרית בעל פרמטר ששית שתוחלתו שש, ומקבלים בסיכוי ששית משתנה גיאומטרית בעל פרמטר חמש ששית

שתוחלתו 1.2. התוחלת הכוללת היא $1.2 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot 6 + 1$.

דרך שנייה

מחכים למכסימום בין שני משתנים גיאומטריים בעלי פרמטרים של ששית ושל חמש ששיות. המכסימום ועוד המינימום של שני משתנים שווים לסכום שני המשתנים. כאן המינימום חייב להתרחש בהטלה הראשונה. ניתן לחלץ את תוחלת המכסימום בעזרת התוחלות של שלושת

$$\text{האחרים: } 1 - \frac{1}{5/6} + \frac{1}{1/6}$$

שאלה 8

תשובה: ג

ההסתברות המותנה שהמפתח במגירה התשיעית בהינתן שהוא במגירה התשיעית או בחוץ

$$\text{היא } \frac{0.9 \cdot \frac{1}{9}}{0.9 \cdot \frac{1}{9} + 0.1}$$

שאלה 9

תשובה: ג

כל אחד משני המשתנים מקבל את הערך אפס בסיכוי $0.5 = e^{-\ln(2)}$. צריך שלפחות אחד מהם יקבל את הערך אפס.

שאלה 10

תשובה: ד

אם המשתנים המקוריים אינם מנוונים, אז סדרות הממוצעים של הסדרות $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ ו $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ לא שואפות בהסתברות לגודל ידוע מראש. השאיפה היא לגדלים שתלויים בערך שמקבל X_1 .

שאלה 11

כ. משתנה שסופר את מספר הכדורים הכחולים בהוצאת כדור אחד מבין שני כדורים שאחד מהם הוא כחול, הוא גם משתנה $U[0,1]$.
