

מספר ת"ז: _____

מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

מועד א', 31/1/07

פרופ' אהוד לרר

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת. משקל כל אחת הוא 7; סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים או במחברות. ניתן להשתמש בדף נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____

מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

1. תאריכי ימי ההולדת של אנשים שונים הם בלתי תלויים. מהי ההסתברות שלבדיוק שלושה מבין החמישה אילנה, ליאת, ניר, אופיר ואדם, יש יום הולדת במחצית השניה של השנה?
- א. 0.3125
 ב. 0.5
 ג. 0.34375
 ד. 0.375
 ה. אף אחד מהנ"ל
-

2. בהמשך לשאלה 1, נניח שידוע שליאת וניר הם תאומים, מהי כעת ההסתברות שלבדיוק שלושה מבין החמישה אילנה, ליאת, ניר, אופיר ואדם, יש יום הולדת במחצית השניה של השנה?
- א. 0.15625
 ב. 0.21875
 ג. 0.25
 ד. אותה הסתברות כמו בשאלה הקודמת
 ה. אף אחד מהנ"ל
-

3. יהיו X_i , $1 \leq i < \infty$ סדרת משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות. נניח שמתקיים:
- $$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = +1) = \frac{1}{3}$$
- יהי $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ (מכפלת n המשתנים הראשונים). למה שואפת הפונקציה יוצרת מומנטים בנקודה t של Y_n כאשר $n \rightarrow \infty$?
- א. 0
 ב. 1
 ג. ∞
 ד. קיים גבול עבור n -ים זוגיים וקיים גבול עבור n -ים אי-זוגיים והגבולות שונים.
 ה. אף אחד מהנ"ל
-

4. לליאת צרור של 10 מפתחות והיא מאמינה בהסתברות 90% שאחד מהם הוא המפתח למשרדה. לאחר שניסתה 9 מתוך 10 המפתחות והם לא התאימו, איזו הסתברות היא אמורה לתת לכך שאחרון יתאים לדלת משרדה?

- א. 0.90
 - ב. 0.50
 - ג. 0.09
 - ד. 9/19
 - ה. אף לא אחד מהנ"ל
-

5. מהי התוחלת המותנה של סכום 4 הטלות בלתי תלויות של קוביה אם ידוע שבהטלה הראשונה התקבלה תוצאה זוגית ובאחרונה תוצאה המתחלקת ב- 3?

- א. 14
 - ב. 15
 - ג. 14.5
 - ד. 15.5
 - ה. אף אחד מהנ"ל
-

6. מבצעים סידרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. ההסתברות שנקבל תוצאת ראש לפני שנקבל רצף של שני פלי :
א. שווה להסתברות שנקבל רצף של 100 פלי לפני שנקבל רצף של 200 עצים.

- ב. שווה ל $\frac{3}{4}$
 - ג. שווה ל $\frac{2}{3}$
 - ד. שווה ל $\frac{1}{2}$
 - ה. אף אחד מהנ"ל
-

7. X ו Y משתנים מקריים בלתי תלויים. X הוא משתנה מקרי מעריכי בעל תוחלת 1 ו Y הוא משתנה מקרי מעריכי בעל תוחלת $\frac{1}{2}$. $P(X > Y)$ שווה ל :

א. $\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{4}$

ג. הסתברות שמשתנה מקרי מעריכי בעל תוחלת 100 מקבל ערך גדול יותר מאשר משתנה מקרי מעריכי בעל תוחלת 50 שאינו תלוי בו.

ד. $\frac{1}{4}$

ה. אף אחד מהנ"ל

8. מבצעים סדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת. התוצאה הגבוהה ביותר שהתקבלה עד שלב מסוים נקראת מכסימום זמני. ההסתברות שהתוצאה 3 תהיה מכסימום זמני לפחות פעם אחת שווה ל :

א. $\frac{1}{4}$

ב. $\frac{1}{3}$

ג. $\frac{1}{6}$

ד. ההסתברות שהתוצאה 4 תהיה מכסימום זמני לפחות פעם אחת.
ה. אף אחד מהנ"ל

9. בהמשך לשאלה הקודמת, מהי ההסתברות שכל חמשת המספרים 1,2,3,4,5 יהיו כל אחד מכסימום זמני לפחות פעם אחת ?

א. $\frac{1}{120}$

ב. 0

ג. $\frac{1}{720}$

ד. $\frac{1}{6^5}$

ה. אף אחד מהנ"ל

10. $X \sim N(0.5, 1)$ (משתנה נורמלי בעל תוחלת 0.5 ושונות 1). מהו $P(X^2 < 1)$?
- א. 0.6247
 - ב. 0.6915
 - ג. 0.3830
 - ד. 0.4235
 - ה. אף אחד מהנ"ל
-

11. $X \sim N(0, 1)$. נגדיר משתנה Y להיות בעל התפלגות המותנה בערכו של X . בהינתן $X = x$, אם $|x| < 1$ אז Y מקבל את ערכו של X ואחרת Y מקבל את הערך 1.
- א. ל Y אין שונות סופית.
 - ב. ל Y יש שונות סופית הגדולה מ 1.
 - ג. ל Y יש שונות הקטנה מ 1.
 - ד. ל X ול Y יש אותה שונות.
 - ה. אף אחד מהנ"ל
-

12. X מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda = 1$. מהו $E(|X - 1|)$?
- א. $\frac{2}{e}$
 - ב. 0
 - ג. $\frac{1}{2e}$
 - ד. $\frac{1}{e}$
 - ה. אף אחד מהנ"ל
-

13. המשתנה המקרי X מקבל תשעה ערכים שונים בהסתברות $\frac{1}{9}$ כל אחד. ידוע ש $E(X) = 0.5$ ו $Var(X) = 1$. מי מבין הבאים אינו אפשרי?

א. $P(X = 0.5) = \frac{1}{9}$

ב. $P(X = 3.5) = \frac{1}{9}$

ג. $E(X^{2007}) < 0$

ד. $P(X > 0.5) = \frac{7}{9}$

ה. אף אחד מהנ"ל

14. יהיו X_1, X_2, \dots, X_{10} התוצאות של עשר הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת.

שווה ל: $Var\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)$

א. 15

ב. $\frac{35}{2}$

ג. $\frac{50}{36}$

ד. $10^2 \cdot Var(X_1)$

ה. אף אחד מהנ"ל

15. נבחרת נקודה אקראית (X, Y) . בסיכוי 0.5 היא נבחרת בהתפלגות אחידה בתוך מלבן נתון שצלעותיו מקבילות לצירים ובסיכוי 0.5 היא נבחרת באחד מקודקודיו של מלבן זה, כאשר לכל אחד מהקודקודים יש סיכוי שווה להבחר.

נסמן: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

א. עבור כל מספר a המקיים $0 \leq a \leq 1$ קיימת נקודה (x, y) כך ש $F_{X,Y}(x, y) = a$.

ב. קיימת נקודה (x, y) כך ש $F_{X,Y}(x, y) = 0.2$, אך לא קיימת נקודה כך ש

$F_{X,Y}(x, y) = 0.8$.

ג. זוג המשתנים X ו Y הם בלתי תלויים אם ורק אם המלבן הוא ריבוע.

ד. קיים (x, y) כך ש $F_{X,Y}(x, y) = a$ אם ורק אם $\frac{1}{8} \leq a \leq \frac{7}{8}$.

ה. אף אחד מהנ"ל

טבלה 1: טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית. (השטח מ- $-\infty$ עד x).

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.7618	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.8028	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.8773	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.9037	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.9302	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.9456	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.9582	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.9675	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.9749	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.9807	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.9852	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9887	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9915	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9936	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9952	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9965	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9974	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9981	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9986	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9990	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9993	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9995	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9997	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9998	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9998	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9999	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9999	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	1.0000	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	1.0000	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	1.0000	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	1.0000	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	1.0000	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	1.0000	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
x	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290	3.891	4.414
$\Phi(x)$	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1-\Phi(x)]$	0.4	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001