

© כל הזכויות שמורות  
קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.  
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

## פתרון הבחינה של פרופ' אהוד לרר מ 07/02/07

|    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | שאלה  |
| ג  | א  | ב  | ג  | ב  | ה  | ד | ד | א | ב | ד | א | ג | ד | ב | תשובה |

### מספר הערות לגבי הפתרונות

#### שאלה 1:

אין כאן חזרות. למפתח יש סיכוי שווה להיות בכל אחת מהמגרות. המיקום מתפלג אחיד.

#### שאלה 2:

מיקומו של המפתח מתפלג אחיד בין 1 ל 10.

$$\frac{1+10}{2}$$

#### שאלה 3:

הסיכוי שהוא אינו במגרה שנסרקה ראשונה הוא  $\frac{9}{10}$ . בכל שלב שאחר-כך כל עוד המפתח לא נמצא, ברור שהמפתח איננו באחרונה שנסרקה, ויש סיכוי שווה לסרוק את כל אחת מהאחרות.

לכן ההסתברות שהוא לא ימצא ב 3 הראשונות היא  $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9}$ .

#### שאלה 4:

אסור לו להכשל 6 פעמים. אם הוא לא נכשל 6 פעמים רצוף, אז הוא משיג את יעדו.

#### שאלה 5:

הסתברות מותנה: שלא יכשל 4 פעמים בהינתן שלא נכשל 6 פעמים.

A - שלא יכשל 4 פעמים רצוף

B - שלא יכשל 6 פעמים רצוף

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1 - q^4}{1 - q^6}$$

#### שאלה 6:

בהסתברות  $1 - q^6$  הוא זוכה בשקל אחד ובהסתברות  $q^6$  הוא מפסיד 63 שקלים.

כך תוחלת הרווח היא  $63 \cdot (1 - q^6) - 1 \cdot q^6$ .

#### שאלה 7:

ההסתברות שמשנתנה רציף יקבל ערך מתוך קבוצה בת מניה של ערכים היא אפס. איחוד סופי ( וגם בין מניה ) של מאורעות בעלי הסתברות אפס, הוא גם בעל הסתברות אפס.

### שאלה 8:

למשתנה  $X$  יש צפיפות של 0.5 בקטע שבין  $-1$  ל  $+1$ . אם הוא מקבל ערך שלילי, אז  $Y$  יכול לקבל רק ערך גדול יותר. אם  $X$  מקבל ערך  $x > 0$ , אז ההסתברות ש  $Y$  יהיה גדול ממנו היא  $e^{-x}$ . לפי חישוב הסתברות שלמה ההסתברות המבוקשת שווה ל

$$\int_{-1}^0 0.5 dx + \int_0^1 0.5 e^{-x} dx$$

### שאלה 9:

$X$  הוא משתנה עם צפיפות ששווה לפעמיים הצפיפות של משתנה נורמלי סטנדרטי עבור  $x$  חיוביים. קירוב טוב הוא שיתקבל ערך בין 1 ל 2 או ערך גדול מ 3. ערכים גדולים מ 4 מתקבלים בהסתברות מאוד נמוכה. לכן, כאשר מייחסים את כל הערכים הגדולים מ 3 לערך אי זוגי, הטעות היא קטנה ביותר. הקירוב המתקבל הוא  $2(\phi(2) - \phi(1)) + 2(1 - \phi(3))$ .

### שאלה 10:

דוגמא מפריכה ל א' ול ב' היא ששני המשתנים הם זהים:  $X = Y$  ואז שונות הסכום היא  $2^2 \cdot \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$  ( שונות של משתנה  $U(a, b)$  היא  $\frac{(b-a)^2}{12}$  ועבור כל קבוע  $c$  מתקיים  $V(cX) = c^2 V(X)$  ). דוגמא מפריכה ל ג' ול ד' היא  $Y = 1 - X$  ואז שונות הסכום היא אפס.

### שאלה 11:

צריך ששלושת ההטלות יתנו תוצאה לא גדולה מ 4, אך לא שכל התוצאות יתנו תוצאה לא גדולה מ 3. ההסתברות של המאורע הראשון היא  $\left(\frac{4}{6}\right)^3$  וההסתברות של המאורע השני המוכל בו היא  $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ . מתקבלת הסתברות

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3$$

### שאלה 12:

כדי שלקלף עלה יהיו שני שכני עלה, הוא ראשית צריך להיות בין 50 מתוך 52 הקלפים שיש להם שני שכנים. לקלף עלה שיש לו שני שכנים, יש שני שכני לב בסיכוי  $\frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50}$ . תוחלת הסכום של 13 אינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם שהיא  $13 \cdot \frac{50}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50}$ .

### שאלה 13:

המאורע ש  $(Y = 1)$  יכול להכיל את המאורע ש  $(X = 1)$ , אבל לא יכולה להיות הכלה הפוכה. אם כאשר  $(Y = 1)$  בהכרח  $(X = 1)$ , אז התוחלת המותנה של  $X$  היא 1. כדי שיהיה מתאם של 1, צריך שיהיה קשר לינארי עולה בין המשתנים. כאן לא יתכן קשר לינארי: יש יותר ערכי  $X$  אפשריים מאשר ערכי  $Y$  אפשריים, לכן יש ערכי  $Y$  שעבורם מתקבל יותר מערך  $X$  אחד, לכן אין קשר לינארי. יתכן שבכל מקרה כאשר  $X$  מקבל ערכים בין 1 ל 5,  $Y$  יקבל את אותו ערך. במקרה זה הם שווים בסיכוי של למעלה מ 0.8.

**שאלה 14:**

כל משתנה מקבל ערך  $-1$  בהסתברות  $0.3$ . הערכים החיוביים שיכולים להתקבל הם לפחות  $0.6$ . לכן אם לפחות אחד המשתנים מקבל ערך חיובי אז הסכום בהכרח חיובי. זה קורה בסיכוי  $1 - 0.3^2$ .

**שאלה 15:**

התוחלת של המשתנה היא  $2 = \int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} x dx$ . המומנט השני הוא  $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} x^2 dx = \infty$  לכן לא קיימת שונות

סופית ולכן אי אפשר לקבל חסם בעזרת אי-שוויון צ'בישב. לפי אי שוויון מרקוב מתקבל חסם

$$P(X \geq 100) \leq \frac{E(X)}{100} = \frac{2}{100}$$

---

שלומי