

מספר ת"ז: _____

מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

מועד א' נוסף, 7/2/07

פרופ' אהוד לרר

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת. משקל כל אחת הוא 7; סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים או במחברות. ניתן להשתמש בדף נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____

מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

שאלה 1

בארון יש 10 מגרות. אדם שם מפתח באחת המגרות שנבחרה באקראי כך שלכל מגרה היה סיכוי שווה להיבחר. ליאת חיפשה את המפתח. ליאת ערכה סדרת חיפושים במגרות. היא סרקה מגירות כך שבכל פעם הסריקה נערכה במגרה שאותה עדיין היא לא סרקה. ההסתברות שהמפתח איננו באחת משלושת המגרות שנסרקו ראשונות היא:

א. תלויה בסדר החיפוש

ב. 0.7

ג. 0.9^3

ד. קטנה מ 0.7

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 2

בהמשך לשאלה 1, מהי תוחלת מספר המגרות שליאת סרקה עד וכולל המגרה שבה נמצא המפתח.

א. 10

ב. 6

ג. 5

ד. 5.5

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 3

בהמשך לשאלה 1, כעת נניח שליאת בוחרת בכל שלב עד למציאת המפתח, לסרוק מגרה אקראית מבין המגרות השונות מהאחרונה שנסרקה, כך שבכל שלב לאחר השלב הראשון יש לכל אחת מ 9 המעומדות לסריקה באותו שלב סיכוי שווה להיסרק. כעת ההסתברות שהמפתח איננו באחת המגרות שנסרקו בשלושת הסריקות הראשונות היא:

א. 0.729

ב. אותה הסתברות כמו בשאלה הראשונה

ג. $\frac{64}{90}$

ד. $\frac{512}{729}$

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 4

מהמר מתחיל סידרת הימורים עם 63 שקל. מטרתו היא להרויח שקל. בכל שלב של ההימור מותר לו להמר על כל סכום שברשותו. בהסתברות p הוא מגדיל את הונו בסכום הזהה לסכום ההימור ובהסתברות $q = 1 - p$ הוא מפסיד את סכום ההימור. בפעם הראשונה הוא מהמר על שקל אחד. אם הוא מרויח הוא מפסיק להמר ואם הוא מפסיד הוא מהמר פעם נוספת על 2 שקלים. הוא ממשיך להמר ולהכפיל את סכום ההימור עד שהוא מגיע להון יותר גדול ממה שהיה לו בתחילה או שהוא מפסיד את כל הונו. נניח שההימורים הם בלתי תלויים זה בזה. ההסתברות שהוא יצליח לזכות בשקל המיוחל היא:

$$\begin{aligned} \text{א. } & 1 - q^6 \\ \text{ב. } & \binom{6}{1} pq^5 \\ \text{ג. } & 1 - q^5 \\ \text{ד. } & \sum_{k=1}^5 \binom{6}{k} p^k q^{6-k} \end{aligned}$$

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 5

בהמשך לשאלה הקודמת, אם ידוע שהוא הצליח לזכות בשקל, ההסתברות שעשה זאת עד וכולל ההימור הרביעי היא:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \frac{1 - q^3}{1 - q^5} \\ \text{ב. } & \frac{\sum_{k=1}^3 \binom{6}{k} p^k q^{6-k}}{\sum_{k=1}^5 \binom{6}{k} p^k q^{6-k}} \\ \text{ג. } & \frac{\binom{4}{1} pq^3}{\binom{6}{1} pq^5} \\ \text{ד. } & \frac{1 - q^4}{1 - q^6} \end{aligned}$$

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 6

תוחלת הרווח היא:

$$\begin{aligned} \text{א. } & -1 \\ \text{ב. } & 1 - 64q^6 \\ \text{ג. } & 1 - 64p^6 \\ \text{ד. } & 1 - 32q^5 \\ \text{ה. } & \text{אף לא אחד מהנ"ל} \end{aligned}$$

שאלה 7

- $X_i \sim N(0,1)$, הם סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות, $1 \leq i \leq 100$, ההסתברות שכל 100 המשתנים יקבלו ערכים שאינם שלמים
- שווה ל 1
 - שווה ל 1 רק אם המשתנים הם בלתי תלויים
 - תמיד קטנה מ 1
 - יכולה להיות קטנה מ 1 או שווה ל 1 עבור סדרת משתנים תלויים
 - אף לא אחד מהנ"ל
-

שאלה 8

- X ו Y הם זוג משתנים בלתי תלויים. נניח ש $X \sim U(-1,1)$ (התפלגות אחידה רציפה).
נניח ש $Y \sim \exp(1)$ (התפלגות מעריכית).
 $P(Y > X)$ שווה ל
- $2e^{-1}$
 - $2 - 3e^{-1}$
 - $1.5 - e^{-1}$
 - $1 - 0.5e^{-1}$
 - אף לא אחד מהנ"ל
-

שאלה 9

- יהי X משתנה מקרי רציף בעל פונקציית צפיפות ששווה ל 0 עבור $x < 0$ ושווה ל $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ עבור $x \geq 0$. יהי $Y = \lfloor X \rfloor$ (החלק השלם של X). ההסתברות ש Y יקבל ערך אי זוגי היא בקירוב (עם דיוק של לפחות שלוש ספרות אחרי הנקודה).
- 0.3200
 - 0.2718
 - 0.3174
 - 0.2744
 - אף לא אחד מהנ"ל
-

שאלה 10

X ו Y הם משתנים מקריים שווי התפלגות. בניח ש $X \sim U(0,1)$ (אחיד רציף).

א. בהכרח $Var(X+Y) < \frac{1}{6}$

ב. בהכרח $Var(X+Y) \leq \frac{1}{6}$ אך א' לא נכון

ג. בהכרח $Var(X+Y) > 0$

ד. בהכרח $Var(X+Y) \geq \frac{1}{12}$ אך ג' לא נכון

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 11

מבצעים שלוש הטלות בלתי תלויות של קובייה. בכל הטלה של הקובייה מתקבלת אחת משש הפאות של הקובייה כאשר לכל פאה יש סיכוי שווה להתקבל. על כל פאה מופיע מספר. המספרים 1,2,3,4 מופיעים כל אחד על פאה אחת. המספר 6 מופיע על שתי פאות. מהי ההסתברות שהתוצאה המכסימלית שתתקבל היא 4?

א. $\frac{64}{216}$

ב. $\frac{37}{216}$

ג. $\frac{27}{216}$

ד. $\frac{3}{6}$

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 12

בחפיסת קלפים יש 52 קלפים שבהם יש 13 עלים ו 13 לבבות. מערבבים היטב את הקלפים. מהי תוחלת מספר קלפי העלה שלהם יש שני קלפי לב שכנים? (דרושה תשובה עם דיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה.)

א. 1.368

ב. 0.8125

ג. 0.7647

ד. 1

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 13

Y ו X הם משתנים מקריים בעלי התפלגות אחידה בדידה, $Y \sim U[1,5]$, $X \sim U[1,6]$.

א. יתכן ש $E(X|Y=1)=1$

ב. יתכן ש $E(Y|X=1)=1$

ג. יתכן שמקדם המתאם בין X ל Y הוא 1

ד. לא יתכן ש $P(X=Y) > 0.8$

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 14

יהיו Y ו X שני משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. נניח שמתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.3 & -1 \leq x < 6 \\ \frac{x}{20} & 6 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

מהו $P(X+Y > 0)$

א. 0.91

ב. 0.25

ג. 0.29

ד. 0.7

ה. אף לא אחד מהנ"ל

שאלה 15

יהי X משתנה מקרי רציף בעל צפיפות ששווה ל 0 עבור $x < 1$ ושווה ל $\frac{2}{x^3}$ עבור

$1 \leq x < \infty$. נסתכל על המאורע $(X \geq 100)$. נסתכל על החסמים העליונים שניתן לקבל

למאורע זה לפי אי שיויון מרקוב ולפי אי שיויון צ'בישב?

א. לא ניתן לקבל חסמים קטנים מ 1 לפי שני האי שיויונים.

ב. ניתן לקבל חסם קטן מ 1 רק לפי אי שיויון צ'בישב.

ג. ניתן לקבל חסם קטן מ 1 רק לפי אי שיויון מרקוב.

ד. ניתן לקבל חסם קטן מ 0.05 לפי כל אחד מהם.

ה. אף לא אחד מהנ"ל

