

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

מועד ב', ספטמבר 2006

פרופ' אהוד לרר

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת. משקל כל אחת הוא 7; סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים או במחברות. ניתן להשתמש בדף נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. בהצלחה.

מספר תשובות שגויות: _____

מספר תשובות נכונות: _____

ציון: _____

1. נתונה מטריצה מסדר 2×3 :

1	2	3
2	8	2

ליאת בוחרת בשורה ואדם בוחר בעמודה, כך נבחרת משבצת בודדת. הבחירה של שניהם נעשית באופן בלתי תלוי.

ליאת בוחרת בשורה הראשונה בסיכוי $\frac{2}{3}$ ובשורה השנייה בסיכוי $\frac{1}{3}$.

אדם בוחר בכל אחת מהעמודות בסיכוי שווה.

התשלום שמקבלת ליאת הוא התשלום הרשום במשבצת שנבחרה.

תוחלת התשלום שמקבלת ליאת היא:

א. 2

ב. $\frac{7}{3}$

ג. $\frac{8}{3}$

ד. 3

ה. אף אחד מהנ"ל

2. בהמשך לשאלה הקודמת, נניח שליאת קבלה תשלום של 2, מהי ההסתברות שהיא בחרה בשורה הראשונה?

א. $\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{2}$

ג. $\frac{2}{3}$

ד. $\frac{1}{4}$

ה. אף אחד מהנ"ל

3. מבצעים סידרה של n הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. יהי X - מספר ההצלחות.

בשימוש באי-שוויון צ'בישב ה- n המינימלי כך ש $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{16}$ הוא

א. 40

ב. 20

ג. 100

ד. 200

ה. אף אחד מהנ"ל

4. מבצעים סידרה של n הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. יהי X - מספר ההצלחות.

הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ הוא

א. קטן מ 0.0001

ב. 0.046

ג. 0.023

ד. 0.0002

ה. אף לא אחד מהנ"ל

5. משרד מכין 6 מכתבים. אחד ממוען לכתובת A, שניים לכתובת B ושלושה לכתובת

C. כמו כן המשרד מכין 6 מעטפות: אחת ממוענת ל-A, שתיים ל-B ושלוש ל-C.

מתוך רשלנות, המכתבים מוכנסים למעטפות באקראי, מכתב לכל מעטפה.

הסיכוי שכל ששת המכתבים ישלחו לכתובות הנכונות הוא:

א. $\frac{1}{6}$

ב. $\frac{1}{60}$

ג. $\frac{1}{360}$

ד. $\frac{1}{720}$

ה. אף אחד מהנ"ל

6. בהמשך לשאלה הקודמת, יהי S מספר המכתבים שנשלחו לכתובת הנכונה.

התוחלת של S היא:

א. $\frac{17}{6}$

ב. 3

ג. $\frac{7}{3}$

ד. 2

ה. אף אחד מהנ"ל

7. יהיו X ו Y שני משתנים מקריים שווי התפלגות. בניח ש $X \sim U(0,1)$.

א. $0.8 < P(X^2 + Y^2 < 1) < 0.85$

ב. $0.75 < P(X^2 + Y^2 < 1) < 0.8$

ג. $0.7 < P(X^2 + Y^2 < 1) < 0.75$

ד. $0.65 < P(X^2 + Y^2 < 1) < 0.7$

ה. אף אחד מהנ"ל

8. יהיו X, Y משתנים מקריים שווי התפלגות. מתקיים $X \sim U(0,1)$.

מהו $P(X^2 > Y)$?

א. אם הם בלתי תלויים אז $\frac{1}{2}$

ב. אם הם בלתי תלויים אז $\frac{1}{3}$

ג. אם הם בלתי תלויים אז $\frac{1}{4}$

ד. $\frac{1}{6}$ בין אם הם תלויים או בלתי תלויים

ה. אף אחד מהנ"ל

9. יהיו X, Y זוג משתנים. מתקיים בהכרח:

א. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, -x) = 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 0} F_{X,Y}(x, -x) = 0$

ג. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, -x) = 0$

ד. $\lim_{x \rightarrow 0} F_{X,Y}(x, -x) = 1$

ה. אף אחד מהנ"ל

10. יהיו X, Y, Z שלושה משתנים מקריים שווי התפלגות. נניח שמתקיים $X \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$W = X + Y + Z \text{ יהי } Z \sim B(p), Y \sim B(p)$$

נתייחס להסתברות של המאורע ש W זוגי.

- א. בכל מקרה הסתברות זו שווה ל 0.5 .
- ב. יתכן שהסתברות זו שווה ל 0.5 רק אם שלושת המשתנים הם בלתי תלויים.
- ג. אם X בלתי תלוי ב Y וגם X בלתי תלוי ב Z אז הסתברות זו שווה ל 0.5 , אך א' לא נכון.
- ד. יתכן שהסתברות זו שווה לאפס.
- ה. אף אחד מהנ"ל

11. מבצעים 100 הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת. יהי \max המשתנה המקרי ששווה לתוצאת המכסימום של 100 ההטלות.

מתקיים:

- א. $5.5 < E(\max) < 6$
- ב. $5 < E(\max) < 5.5$
- ג. $4.5 < E(\max) < 5$
- ד. $4 < E(\max) < 4.5$
- ה. אף אחד מהנ"ל

12. נתונים שני מטבעות. לכל אחד מהם יש צד שעליו כתוב "0" וצד שעליו כתוב "1".

המטבע הראשון נופל על "1" בסיכוי $\frac{1}{3}$ והמטבע השני נופל על "1" בסיכוי $\frac{2}{3}$.

בשלב ראשון בוחרים באקראי אחד מהם. במטבע שנבחר מבצעים סידרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות. יהיו X_1, X_2, X_3, \dots תוצאות ההטלות האלה.

א. X_1, X_2, X_3, \dots הם קבוצת משתנים בלתי תלויים.

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1$ עבור כל $\varepsilon > 0$.

ג. $E\left(X_{11} \mid \sum_{i=1}^{10} X_i = 0\right) = \frac{1}{2}$

ד. $E\left(X_{11} \mid \sum_{i=1}^{10} X_i = 0\right) = \frac{1}{3}$

ה. אף אחד מהנ"ל

13. מושיבים באקראי 5 זוגות (סך הכל 10 אנשים) סביב מעגל. אחד הזוגות הוא הזוג
ליאת ואדם וזוג נוסף הוא אילה וגולן. יהי A המאורע המציין שליאת יושבת ליד אדם
ויהי B המאורע המציין שאילה יושבת ליד גולן.
מקדם המתאם בין A ל B הוא:

- א. חיובי
ב. אפס
ג. $-\frac{1}{90}$
ד. $-\frac{1}{45}$
ה. אף אחד מהנ"ל
-

14. ברשת מחשוב לכל משתמש ניתנת סיסמא בת 5 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי
מבין A, B, C, D .
ההסתברות שהתו A מופיע בסיסמא לכל היותר פעם אחת היא

- א. $\frac{81}{128}$
ב. $\frac{47}{128}$
ג. $\frac{1}{3}$
ד. $\frac{81}{256}$
ה. אף אחד מהנ"ל
-

15. נתונים שני כדים, A ו-B. בכד A יש 5 כדורים לבנים ו-5 כדורים שחורים, ובכד B
יש 3 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים. בוחרים באקראי כדור מכד A ומעבירים
אותו לכד B ("הכדור המועבר"). בשלב השני בוחרים באקראי כדור מכד B ("הכדור
הזוכה").

בהינתן שצבעו של הכדור הזוכה הוא לבן, ההסתברות שצבעו של המועבר לבן היא

- א. $\frac{4}{7}$
ב. $\frac{2}{7}$
ג. $\frac{1}{2}$
ד. $\frac{3}{7}$
ה. אף אחד מהנ"ל
-

טבלה 1: טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית. (השטח מ- $-\infty$ עד x).

X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.7618	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.8028	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.8773	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.9037	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.9302	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.9456	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.9582	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.9675	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.9749	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.9807	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.9852	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9887	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9915	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9936	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9952	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9965	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9974	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9981	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9986	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9990	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9993	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9995	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9997	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9998	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9998	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9999	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9999	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	1.0000	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	1.0000	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	1.0000	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	1.0000	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	1.0000	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	1.0000	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
x	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290	3.891	4.414
$\Phi(x)$	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1-\Phi(x)]$	0.4	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001