

פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר ערן שמעיה מ 06/03/15

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| א | ג | א | ג | ג | א | ב | ג | ד | א | א | ד | ב | ד | א | א |

הסברים קצרים

שאלה 1

עשרה נסיונות ב"ת.

שאלה 2

עבור כל תוצאה של סטלין, לנין משלים אותה לסכום זוגי בסיכוי חצי באופן ב"ת בסיבובים אחרים.

שאלה 3

נראה שהזוגיות בסיבובים שונים היא תלויה.
יהי A - המאורע שבסיבוב ראשון היה סכום זוגי.
יהי B - המאורע שבסיבוב שני היה סכום זוגי.

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

כדי שבשני הסיבובים יהיה סכום זוגי, צריך שחרושצ'וב יגריל מספר זוגי בהגרלה היחידה שלו ושטרוצקי יגריל פעמיים מספר זוגי, או שחרושצ'וב יגריל מספר אי זוגי ושטרוצקי יגריל פעמיים מספר אי זוגי.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{35}{125} \neq P(A)P(B)$$

לכן התוצאות בסיבובים שונים הן תלויות.

שאלה 4

לנין וסטלין משלימים כל תוצאה לתוצאה זוגית בסיכוי חצי. לכן בכל יום יש סכום זוגי בסיכוי חצי. לכן בשני המקרים התוחלת הכללית היא $10 \cdot 0.5 = 5$.

שונות סכום אינדיקטורים שווה לסכום שונותיהם ועוד פעמיים סכום השונות המשותפות שבין זוגות אינדיקטורים.

בשני המקרים, סכום השונות של האינדיקטורים של סיבובים שונים היא שווה (כל אינדיקטור הוא בעל הסתברות חצי).

במקרה של לנין וטרוצקי, השונות המשותפות בין כל שני אינדיקטורים היא אפס.

במקרה של סטלין וחרושצ'וב השונות המשותפות הן חיוביות (כל תוצאות הסיבובים הן זהות).

שאלה 5

$$f_Y(y) = \int_{-y}^y ye^{-y} / 4 dx = 0.5y^2 e^{-y}$$

(עבור כל y ביצענו אינטגרל על פונקציה קבועה).

שאלה 6

בהינתן $(Y = y)$, X מקבל את כל הערכים בקטע $(-y, y)$ באותה צפיפות.

שאלה 7

למשל, גם לגבי משתנה $Y \sim N(-6, 36)$ מתקיים

$$P(Y > 6) = 1 - \phi\left(\frac{6 - (-6)}{6}\right) = 1 - \phi(2)$$

שאלה 8

אם למשל מתקיים $P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 3) = P(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{3}$

אז ל X ול Y יש אותה התפלגות $U[1, 3]$, אבל מתקיים $P(X < Y) = \frac{2}{3}$.

אם $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 7, Y = 5)$ אז $P(X < Y) = P(X > Y) = 0.5$, אבל ל X ול Y אין את אותה התפלגות.

שאלה 9

מתקיים $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. אם מתקיים $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$ אז $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$

ולכן $P(B|A) > P(B)$. הגרירה האחרת היא דומה.

שאלה 10

הזמן בין כל שני אירועים עוקבים מתפלג מעריכית.

שאלה 11

המינימום בין שני משתנים מעריכיים ב"ת מתפלג מעריכית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים.

שאלה 12

אחרי זמן בעל תוחלת של 0.5 מקבלים אירוע כלשהו. אחר-כך מחכים זמן בעל תוחלת 1 לאירוע מסוים.

נתן גם הסבר נוסף:

עבור כל שני משתנים מקריים X ו Y מתקיים תמיד $\min\{X, Y\} + \max\{X, Y\} = X + Y$

ולכן מתקיים גם $E(\min\{X, Y\} + E(\max\{X, Y\})) = E(X) + E(Y)$.

כאן לשני זמני הצפיה יש תוחלות של 1 וראינו שלמינימום יש תוחלת של 0.5 . ניתן לחלץ את תוחלת המכסימום.

שאלה 13

כל הפרמוטציות שוות סיכוי. כך הוא מקבל את כל אחד מהשלמים שבין 1 ל 60 בסיכוי שווה.

שאלה 14

מכיון שכל הפרמוטציות שוות סיכוי, אז V ו U הם שווי התפלגות.

שאלה 15

הוא לא יפרוץ בבכי רק אם הוא יקבל יותר מכל קודמיו. לכל אחד מבין עשרת הראשונים, יש את אותו סיכוי לקבל את המספר הגדול ביותר מבין עשרת הראשונים.

שאלה 16

אם ילד אחד פורץ בבכי, זה לא נותן שום אינדיקציה על היחסים בין המספרים שקבלו אחרים. המאורע שילד מסוים קיבל יותר מכל קודמיו, לא תלוי בסדר שבין קודמיו.

שלומי