

מספר ת"ז: _____

מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשע"א,

אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.
משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____

מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

שאלה 1

בבניין בן 10 קומות, נכנסים 5 דיירים למעלית בקומת הקרקע. כל אחד מהדיירים לוחץ באופן מקרי על כפתור אחת הקומות מ-1 ועד 10 (ייתכן שמספר דיירים לוחצים על אותו כפתור).

הסתברות כי המעלית תעלה בדיוק עד הקומה החמישית ולא יותר היא:

$$\frac{5^5 - 4^5}{10^5}$$

(א) 0.031

(ב) 0.107

(ג) 0.021

(ד) אף אחד מהב"ל.

(כולם) 5 אף אחד לא לוחץ
5 אף אחד לא לוחץ
(כולם) 5 אף אחד לא לוחץ
(כולם) 5 אף אחד לא לוחץ

שאלה 2

מתוך n זוגות נעליים בוחרים באופן מקרי $2r$ נעליים בחדות ($2r < n$).

הסתברות שהוצאו 2 זוגות שלמים בדיוק היא:

$$\frac{\binom{n}{2} \binom{n-2}{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$$

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{2n}{2r}}$$

$$\frac{\binom{n}{2} \binom{n-2}{2r-4} 2^{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$$

(ד) אף אחד מהב"ל.

אם תוצאתו של זוגות וצורה נכונה
מתוך 2r-4 אף אחד לא לוחץ

© כל הזכויות שמורות

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.

אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ

לאתר של שלומי.

שאלה 3

נתונים 3 מטבעות. 2 מהמטבעות הוגנים (סיכוי 1/2 ל"עץ"), ואחד מוטה (סיכוי 1/4 ל"עץ"). בוחרים מטבע אחד באקראי ומטילים אותו שתי פעמים. מה ההסתברות שנבחר מטבע מוטה בהינתן כי התקבל פעם אחת "עץ"?

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

(א) $\frac{3}{11}$

(ב) $\frac{1}{3}$

(ג) $\frac{1}{5}$

(ד) אף אחד מדג"ל.

שאלה 4

חוקר לוקח מדגם פשוט של n אנשים בלתי תלויים באוכלוסייה כדי לבדוק את פרופורציית המעשנים באוכלוסייה p .

מה גודל המדגם המינימלי הדרוש כדי להבטיח כי בהסתברות של 0.95 לכל הפחות פרופורציית המעשנים

במדגם לא תהיה רחוקה מ- p ביותר מ-0.01 ע"פ אי שוויון צ'בישב, לכל $0 \leq p \leq 1$.

$\frac{hp(1-p)}{h^2}$
 $\frac{1}{4h}$

(א) לפחות 50,000.

(ב) יותר מ-10,000 אך פחות מ-10,000.

(ג) חסרים נתונים על מנת לענות על השאלה.

(ד) אף אחד מדג"ל.

שאלות פתוחות פ"א
עליון גבול
 $\frac{1}{4h} \leq 0.05$
 $\frac{1}{(0.01)^2} \leq 0.05$ כ"ק (תיק"א

שאלה 5

בהמשך לשאלה 4, החוקר החליט לדגום רק 900 אנשים (באקראי).

מה ההסתברות בקירוב כי פרופורציית המעשנים במדגם לא תהיה רחוקה מ- p ביותר מ-0.01,

לפי משפט הגבול המרכזי, אם ה- p האמיתי הינו $\frac{1}{2}$.

$$\phi\left(\frac{0.01}{\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 900}}}\right) - \phi\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 900}}}\right) =$$

$$= \phi(0.6) - [1 - \phi(0.6)]$$

(א) קטנה מ-0.5.

(ב) יותר מ-0.5 ופחות מ-0.65.

(ג) הקירוב הנורמלי לא חל על מקרה זה.

(ד) אף אחד מדג"ל.

שאלה 6

X ו-Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים. ל-X ול-Y אותה פונקציית צפיפות:

$$\int_0^2 \int_{2-x}^2 \frac{1}{4} dy dx = \dots = \frac{5}{24}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} & -3 \leq t \leq 0 \\ \frac{t}{4} & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הסתברות ש- $X + Y \geq 2$ היא

(א) $\frac{1}{8}$

(ב) $\frac{1}{64}$

(ג) $\frac{5}{24}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 7

בהמשך לשאלה 6, התוחלת $E[X]$:

$$\int_{-3}^0 \frac{1}{6} x dx + \int_0^2 \frac{x}{4} x dx = \dots$$

(א) שווה ל-0.

(ב) שלילית אך גדולה מ-1.5.

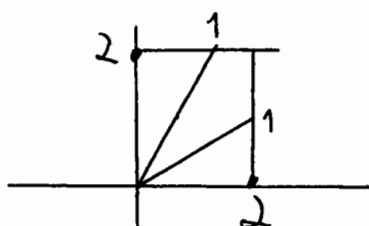
(ג) חיובית אך קטנה מ-0.25.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

יהיו $X, Y \sim U(0,2)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר את המאורעות $A = \{X < 2Y\}$ ו- $B = \{Y \leq 2X\}$

אזי ההסתברות $P(A|B)$ שווה ל-



(א) $\frac{1}{3}$

(ב) $\frac{1}{2}$

(ג) $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

תחום גודל שטח 3
תחום גודל שטח 2
איתק תחום גודל

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

שאלה 9

בטיול מאורגן השתתפו 10 זוגות, אשר שובצו ב-10 חדרי מלך (כל זוג בחדר). לכל חדר זוג כרטיסים מגנטיים לפתיחת דלתות החדר. למרבה הצער, חל בלבול ו-20 הכרטיסים המגנטיים חולקו בין משתתפי הטיול באקראי (מפתח יחיד לכל משתתף). זוג יכול להיכנס לחדר שהוקצה לו אם לפחות אחד מבני הזוג קיבל מפתח נכון. נסמן ב- X את מספר הזוגות שיוכלו להיכנס לחדר שהוקצה להם.

התוחלת $E[X]$ היא:

(א) $\frac{37}{19}$

(ב) 5.5

(ג) $\frac{74}{19}$

(ד) אף אחד מהג"ל.

זוג מסוים יכול לבצע
 קט'כו' $1 - \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19}$

תוחלת הסכום שלהם

$10 \left[1 - \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \right]$

שאלה 10

בהמשך לשאלה 9, חשב את $Var[X]$.

(א) -0.486

(ב) -1

(ג) 0

(ד) אף אחד מהג"ל.

שאלת אלו יכולה לבוא עליה
 היא יכולה לבוא שלה אלו יק אלו
 כמשתנה מעוות, משתנה זה אינו מעוות.

שאלה 11

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם פרמטר $\lambda = 10$.

יהי Z משתנה מקרי בלתי תלוי ב- X עם ההתפלגות $P(Z = 0.9) = 0.2 = 1 - P(Z = 0.6)$.

יהי Y משתנה מקרי נוסף כך ש- $Y | (X = x, Z = z) \sim Bin(x, z)$.

המשתנה המקרי $Y | X = 20$ מפולג

(א) בינומי.

(ב) פואסוני.

(ג) היפרגיאומטרי.

(ד) אף אחד מהג"ל.

אלו הן אלו כי אלו יבוא מבו
 כבימטר של הבינארי
 אלו בטלמוני כי דפינתן $(X=20)$
 דפינתן $(Y \leq 20)$

$$P(Y=y) = 0.2 \cdot 0.9^y \cdot 0.1^{20-y} \binom{20}{y} + 0.8 \cdot 0.6^y \cdot 0.4^{20-y} \binom{20}{y}$$

שאלה 12

בהמשך לשאלה 11, התוחלת של Y (ללא ההנחה כי X=20) שווה ל:

- (א) 6.
 - (ב) 6.6
 - (ג) 8.04
 - (ד) אף אחד מהג"ל.
- 0.2 · 10 · 0.9 + 0.8 · 10 · 0.6

שאלה 13

מטילים קוביה הוגנת 5 הטלות בלתי תלויות. יהי X מספר ההטלות בהן התקבלו התוצאות 1 או 2.

יהי Y מספר ההטלות בהן התקבלו התוצאות 2 או 3. מהו מקדם המתאם בין X ל-Y.

- (א) מקדם מתאם שלילי.
 - (ב) $V(X) = V(Y) = 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{9}$
 - (ג) $Cov(X, Y) = 5 \cdot Cov(X_1, Y_1)$
 - (ד) אף אחד מהג"ל.
- $Cov(X_1, Y_1) = E(X_1 \cdot Y_1) - E(X_1) \cdot E(Y_1) = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$

שאלה 14

נתון משתנה מקרי X המפולג נורמלית עם תוחלת 0.5 ושונות 1. מהו $P(X^2 < 1)$?

- (א) 0.6247
 - (ב) 0.6915
 - (ג) 0.3830
 - (ד) אף אחד מהג"ל.
- $P(X^2 < 1) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.5)$

שאלה 15

שני חוקרים (אייל וסיגל) רצו לאמוד את תוחלת הזמן, בדקות, שנערות בנות עשרה מקדישות לשיחה

בטלפון מדי יום (ניתן להגדיר שזמן השיחה מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן ידועה). כל אחד מהחוקרים

אסף נתונים על 20 נערות שונות.

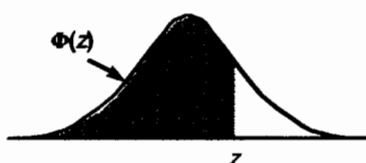
סיגל קבלה את רווח הסמך: [85.32, 94.68]

אייל קיבל את רווח הסמך: [85.76, 93.24]

איזו מהטענות הבאות נכונה:

- (א) רמת הסמך לפיה חשב אייל את רווח הסמך גבוהה מזו של סיגל.
 - (ב) רמת הסמך לפיה חשב אייל את רווח הסמך נמוכה מזו של סיגל.
 - (ג) אין מספיק נתונים להחליט מי חישב לפי רמת סמך גבוהה יותר.
 - (ד) אף אחד מהג"ל.
- הקטע של קצת יותר.

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995