

מספר ת"ז: _____ מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תש"ע,

אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל : 105 נקודות.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
6. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
7. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____ מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

שאלה 1

4 כדורים (שונים) מחולקים באקראי ל - 3 תאים. ההסתברות כי יש לפחות תא אחד ריק היא:

$$1 - \frac{\binom{4}{2} \cdot 3!}{3^4} = \frac{5}{9}$$

(א) $\frac{23}{27}$

(ב) $\frac{4}{9}$

(ג) $\frac{16}{27}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

(קמ"ש"ם בוח"ם ש' כנ"ר"א נא"ס מת"ס"ם)
 א"ס"ם כ"א"ס י"א"ר"ה א"ח"ת

שאלה 2

מבצעים סדרה של 36 הטלות קובייה הוגנת. חשב את ההסתברות שכל אחת מ - 6 התוצאות האפשריות התקבלה בדיוק 6 פעמים.

$$\frac{\binom{36}{6} \binom{30}{6} \binom{24}{6} \binom{18}{6} \binom{12}{6}}{6^{36}}$$

התקבלה בדיוק 6 פעמים.

(א) 2.6×10^{-4}

(ב) 0.167

(ג) 0.187

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 3

סמדר ותמיד מבצעים כל אחד, באופן בלתי תלוי זו מזה, סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. נסמן ע"י S_n, T_n את מספר ה"ראשים" שהתקבלו ב- n ההטלות הראשונות של סמדר ותמיד, בהתאמה.

יהיו $\alpha_n = P(S_n = T_n)$, $\beta_n = P(S_{2n} = n)$ אזי לכל n מתקיים כי:

(א) $\alpha_n = \beta_n$

(ב) $\alpha_n > \beta_n$

(ג) הסדר היחסי של α_n ו- β_n תלוי ב- n .

(ד) אף אחד מהנ"ל.

מטבעות
 (בא"ר)

$$P(S_n = T_n) \stackrel{!}{=} P(S_n = n - T_n) = P(S_n + T_n = n) \stackrel{!}{=} P(S_{2n} = n)$$

שאלה 4

בהמשך לשאלה 3, לפי אי-שוויון צ'בישב, החכם העליון הקטן ביותר להסתברות

הוא: $P(S_{2n} - T_{2n} \geq n)$

$$V(S_{2n} - T_{2n}) = 4n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = n$$

$$P(|S_{2n} - T_{2n}| \geq n) \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

והתוצאה מתקבלת מאי-קושי סטטיסטי.

(א) $\frac{1}{2}$

(ב) $\frac{1}{2n}$

(ג) $\frac{1}{n^2}$

(ד) אף אחד מהם ל.

שאלה 5

הצפיפות המשותפת של X ו- Y נתונה ע"י

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1.5}{\sqrt{x}} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הפונקציה הפזיק של x ו- y מתבלט $V(0, x)$

חשבו $P(2Y < X)$

(א) חיובי אך קטן מ- $\frac{1}{2}$

(ב) $\frac{1}{2}$

(ג) גדול מ- $\frac{1}{2}$ אך קטן מ- $\frac{3}{5}$

(ד) אף אחד מהם ל.

שאלה 6

בהמשך לשאלה 5, מהו $Cov(X, Y)$?

(א) 0

(ב) חיובי אך קטן מ-1

(ג) שלילי

(ד) אף אחד מהם ל.

יש קשר חיובי אם $Cov(X, Y) > 0$.
 X ו- Y מקבלים ערכים בין 0 ל-1

אם $E(XY) < 1$ ו- $E(X) > 0$, $E(Y) > 0$, אז

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) < 0$$

הערה נוספת: $-1 < Cov(X, Y) < 1$.
 כולם הם כפופים מתחום עתידים.

שאלה 7

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים ומפולגים אחיד בקטע $[-3,3]$. ההסתברות

$P(X^2 + Y^2 > 9 | XY > 0)$ היא בקידוב:

$$\frac{3^2 - \frac{1}{4} \pi \cdot 3^2}{3^2}$$

(א) 0.45

(ב) 0.25

(ג) 0.21

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

מטילים מטבע הוגן 10 פעמים (תוצאת הטלה H או T). יהי X מספר המופעים של שלושה H-ים רצופים בסדרת ההטלות. לדוגמה, אם התקבלה הסדרה HHHHHHTTTT אז $X = 4$.

התוחלת $E[X]$ היא:

כנסים של 8 אינדיקטורים שכל אחד

(א) 1

(ב) 1.5

(ג) 1.25

(ד) אף אחד מהנ"ל.

N הם ים הסתברות $\frac{1}{8}$,

שאלה 9

בהמשך לשאלה 8, חשב את $Var[X]$.

$$8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + 2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64} \right) +$$

(א) 2.5

(ב) $\frac{56}{64}$

$$+ 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right)$$

(ג) $\frac{55}{32}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

כל אינדיקטור תלוי באינדיקטורים שסביב איתם

אחת משותפת או שתי האלו משותפת. Cov הם אונים.

שאלה 10

חיזורים נוחתים בכדור הארץ בזרם פואסוני, כך שבמוצע נוחת חיזור אחד כל 6 חודשים.

יהא X_1 - מספר החיזורים שינחתו ב-6 החודשים הקרובים.

יהא X_2 - מספר החיזורים שינחתו ב-18 החודשים הקרובים.

כיצד מתפלג X_1 בהינתן כי $X_2 = 4$.

(א) פואסוני.

(ב) אחיד (בדיד).

(ג) בינומי.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

אם תישקל של הסתברות מיתלת.

תוצאת מספר התוצאות הנאותים
 גודל הטל
 $\frac{1}{6}$
 מספר קריאות
 $\rho(2)$

שאלה 11
 חשב את $Var[X_2 - X_1]$

(א) 12

(ב) 2

(ג) תלוי במקדם המתאם בין X_1 ל- X_2 .

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 12

יהי X משתנה מקרי המפולג נורמלית עם תוחלת 3 וסטיות תקן 0.5. מצא קטע סימטרי סביב התוחלת כך ש-

X נמצא בקטע זה בהסתברות 0.25.

$$\Phi\left(\frac{a-3}{0.5}\right) = 0.5 + \frac{0.25}{2}$$

(א) (2.68, 3.32)

(ב) (2.68, 3.32)

(ג) (2.84, 3.16)

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 13

משתנה מקרי X מפולג $U(50,100)$.

משתנה מקרי Y בהינתן $X = x$ מפולג פואסונית עם פרמטר x ($Poisson(x)$).

מהו $E[Y | X = 70]$

(א) 70

(ב) $\frac{1}{70}$

(ג) 75

(ד) אף אחד מהנ"ל.

ההסתברות הנאותה
 $\rho(70)$

שאלה 14

בהמשך לשאלה 13, $Cov(X, Y)$ הוא:

(א) שווה ל- $Var(X)$.

(ב) 0.

(ג) אין מספיק נתונים בשאלה.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

הצורה

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$= E(X^2) - E(X) \cdot E(X)$$

ואן

שאלה 15

שני סטטיסטיקאים בלתי תלויים, לקחו כל אחד מדגם מקרי פשוט בגודל 100, במטרה להעריך בעזרת ממוצע המדגם את ממוצע מספר שעות הגלישה היומית באינטרנט בקרב ילדי הגן. סטיית התקן של שעות הגלישה היא σ .

יהיו \bar{X}_{100} ו- \bar{Y}_{100} ממוצעי המדגמים של סטטיסטיקאי 1 ו-2, בהתאמה. (כאשר למשל

$$\bar{X}_{100} = \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}$$

$$P\left(|\bar{X}_{100} - \bar{Y}_{100}| < \frac{\sigma}{50}\right)$$

(א) 0.68

(ב) 0.56

(ג) 0.11

(ד) אף אחד מהנ"ל.

$$V(\bar{X}_{100}) = \frac{100 \cdot \sigma^2}{100^2} = \frac{\sigma^2}{100}$$

$$V(\bar{X}_{100} - \bar{Y}_{100}) = \frac{\sigma^2}{50}$$

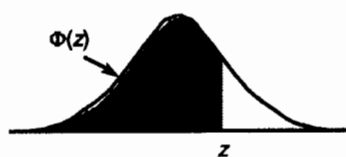
$$\sqrt{V(\bar{X}_{100} - \bar{Y}_{100})} = \frac{\sigma}{\sqrt{50}}$$

$$\Phi\left(\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}\right) - \Phi\left(-\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right) - 1$$

נסיע

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
לאתר של שלומי.

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9736	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995