

מספר ת"ז: \_\_\_\_\_ מספר נבחן: \_\_\_\_\_

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תש"ע,  
אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.  
משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: \_\_\_\_\_ מספר תשובות שגויות: \_\_\_\_\_

ציון: \_\_\_\_\_

© כל הזכויות שמורות  
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ  
לאתר של שלומי.

שאלה 1

4 כדורים (שונים) מחולקים באקראי ל-3 תאים. ההסתברות כי יש לפחות תא אחד עם בדיוק שני כדורים

היא:

(א)  $\frac{8}{9}$

(ב)  $\frac{2}{9}$

(ג)  $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

ההסתברות:  $1 - \frac{3}{3^4} - \frac{3 \cdot \binom{4}{3} \cdot 2}{3^4}$

שאלה 2

בוחרים באקראי וללא החזרה 3 מספרים מתוך המספרים 1, 2, ..., 20. ההסתברות ששלושת המספרים

אינם מכילים אף זוג מספרים עוקב היא בקירוב:

(א) 0.7

(ב) 0.72

(ג) 0.73

(ד) אף אחד מהנ"ל.

הסתברות הנשאלת:  $\frac{19 \cdot 18 - 18}{\binom{20}{3}}$

שאלה 3

סמדר ותמיר מבצעים כל אחד, באופן בלתי תלוי זו מזה, סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. נסמן

ע"י  $T_n, S_n$  את מספר ה"ראשים" שהתקבלו ב-  $n$  ההטלות הראשונות של סמדר ותמיר, בהתאמה.

לכל  $n$ , מתקיים כי ההסתברות  $P(S_{n+1} > T_n)$  היא:

(א) גדול מ-  $\frac{1}{2}$

(ב) שווה ל-  $\frac{1}{2}$

(ג) קטן מ-  $\frac{1}{2}$  עבור  $n$  זוגי, וגדול מ-  $\frac{1}{2}$  עבור  $n$  אי זוגי.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

מתקיים  $P(S_n < T_n) = P(S_n > T_n)$  מכיון שמקליט מטבעי זה

אם ההסתברות היא 0.5

שאלה 4

בהמשך לשאלה 3, עבור  $n$  גדול דיו, ההערכה לפי משפט הגבול המרכזי להסתברות

$$E(S_{2n} - T_{2n}) = 0$$

$P(S_{2n} - T_{2n} \geq \sqrt{n})$  היא בקירוב:

$$V(S_{2n} - T_{2n}) = V(S_{2n}) + V(T_{2n}) - 2 \cdot \text{Cov}(S_{2n}, T_{2n}) \quad \text{0.16 (א)}$$

$$= V(S_{2n}) + V(T_{2n}) = 4n \cdot 0.5 \cdot 0.5 \quad \text{0.35 (ב)}$$

(ג) הקירוב הנורמלי לא חל על מקרה זה. (ד) אף אחד מהנ"ל.

ולכן נראה מצדד קט"ת יתן אולי.

שאלה 5

הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  נתונה ע"י

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

עבור  $-\infty < x < \infty$

$x$  ה'כ'ים ה'ס'ים של  $x$

$$\int_0^x e^{-x} dx = x \cdot e^{-x}$$

ההסתברות  $P(Y < 1)$  היא בקירוב:

$$P(Y < 1) = \frac{1}{x} \quad \text{0.26 (ב)}$$

$$P(Y < 1) = 1 \quad \text{0.63 (ג)}$$

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot x \cdot e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 6

בהמשך לשאלה 5, מהו ה- $\text{Cov}(X, Y)$ ?

$$E(Y|X=x) = \frac{x}{2} \quad \text{0 (א)}$$

$$\text{ולכן ה'מ'ים ה'ט'ל' ה'ת'ל' } \quad \text{0.5 (ב)}$$

(ג) שלילי אך גדול מ-1.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 7

היו  $X, Y \sim U(0, 2)$  משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר את המאורעות  $A = \{X < Y\}$  ו-

$B = \{|X - Y| < \frac{2}{3}\}$  אזי ההסתברות  $P(A|B)$  שווה ל-

$$P\left(-\frac{2}{3} < X - Y < 0\right) = P\left(0 < X - Y < \frac{2}{3}\right) \quad \text{מכיון ש } P(A|B) = \frac{4}{9} \quad \text{(א)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{כאן ההסתברות היא תמיד 1/2} \quad \frac{1}{2} \quad \text{(ב)}$$

$$\frac{5}{9} \quad \text{(ג)}$$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

מרכיבים באקראי מילה באורך 10 באמצעות הספרות 0,1,...,9.

הא  $Y$  מספר הספרות השונות המופיעות במילה שנבחרה. התוחלת  $E[Y]$  היא:

(א) בין 7 ל-9. ההסתברות שספרה מסוימת לא תופיע היא  $\left(\frac{10-1}{10}\right)^{10}$

(ב) בין 1 ל-3. ההסתברות שכל תופיע היא  $\left(\frac{10-1}{10}\right)^{10}$

(ג) בין 4 ל-6.  $1 - \left(\frac{10-1}{10}\right)^{10}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.  $10 \left(1 - \left(\frac{10-1}{10}\right)^{10}\right)$

שאלה 9

בהמשך לשאלה 8, התוחלת  $E[Y^2]$  היא:

(א) בין 20 ל-22.  $E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y)$  מתקיים

(ב) גדולה מ-24.  $E(Y^2) > 36$  מכיון ש  $E(Y) > 6$

(ג) בין 17 ל-19.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

© כל הזכויות שמורות  
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ  
לאתר של שלומי.



שאלה 13

משתנה מקרי  $X$  מפולג  $U(50,100)$ .

משנתנה מקרי  $Y$  בהינתן  $X = x$  מפולג מעריכית עם פרמטר  $x$  ( $\exp(x)$ ).

מהו  $E[Y | X = 70]$ .

(א) 70

(ב)  $\frac{1}{70}$

(ג) 1

(ד) אף אחד מהנ"ל.

ז'ק'ר  $Z \sim \exp(\mu)$  נתק"פ  
 $E(Z) = \frac{1}{\mu}$

שאלה 14

בהמשך לשאלה 13, התוחלת  $E[Y^2]$ :

(א) גדולה מ-  $E[X]$ .  $E(Y^2 | X=x) = V(Y | X=x) + E^2(Y | X=x)$

(ב) קטנה מ-  $E[Y]$ .  $V(Y | X=x) \leq \frac{1}{50^2}$  ז'ק'ר  $\delta$  עיק  $\delta$   $x$   $\delta$

(ג) תלויה בערך  $x$ .

(ד) אף אחד מהנ"ל.

$E(Y^2) < \frac{1}{1000}$   $E^2(Y | X=x) \leq \frac{1}{50^2}$   $\delta$   $\delta$   $\delta$   $\delta$

שאלה 15

שני סטטיסטיקאים בלתי תלויים, לקחו כל אחד מדגם מקרי פשוט בגודל 15, במטרה להעריך בעזרת ממוצע המדגם את ממוצע מספר שעות הגלישה היומית באינטרנט בקרב לדי הגן. סטיית התקן של שעות הגלישה היא  $\sigma$ .

יהיו  $\bar{X}_{15}$  ו-  $\bar{Y}_{15}$  ממוצעי המדגמים של סטטיסטיקאי 1 ו-2, בהתאמה. מצא חסם עליון להסתברות

$P(|\bar{X}_{15} - \bar{Y}_{15}| > 3\sigma)$ , בעזרת אי שוויון צ'בישב.

$E(\bar{X}_{15} - \bar{Y}_{15}) = 0$ ,  $V(\bar{X}_{15} - \bar{Y}_{15}) = \frac{1}{135}$  (א)

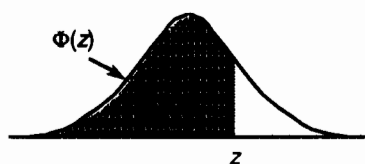
$= V(\bar{X}_{15}) + V(\bar{Y}_{15}) = \frac{2\sigma^2}{15}$  (ב)

$\frac{2}{135}$  (ג)

(ד) אף אחד מהנ"ל.

$\frac{\frac{2}{15} \sigma^2}{(3 \cdot \sigma)^2} = \frac{2}{135}$

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995