

מספר ת"ז: _____ מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תש"ע,
אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.
משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל: 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____ מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

שאלה 1

4 כדורים (שונים) מחולקים באקראי ל-3 תאים. ההסתברות כי יש לפחות תא אחד עם בדיוק שני כדורים היא:

(א) $\frac{8}{9}$

(ב) $\frac{2}{9}$

(ג) $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 2

בוחרים באקראי וללא החזרה 3 מספרים מתוך המספרים $1, 2, \dots, 20$. ההסתברות ששלושת המספרים אינם מכילים אף זוג מספרים עוקב היא בקירוב:

(א) 0.7

(ב) 0.72

(ג) 0.73

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 3

סמדר ותמיר מבצעים כל אחד, באופן בלתי תלוי זו מזה, סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. נסמן ע"י T_n, S_n את מספר ה"ראשים" שהתקבלו ב- n ההטלות הראשונות של סמדר ותמיר, בהתאמה.

לכל n , מתקיים כי ההסתברות $P(S_{n+1} > T_n)$ היא:

(א) גדול מ- $\frac{1}{2}$

(ב) שווה ל- $\frac{1}{2}$

(ג) קטן מ- $\frac{1}{2}$ עבור n זוגי, וגדול מ- $\frac{1}{2}$ עבור n אי זוגי.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 4

בהמשך לשאלה 3, עבור n גדול דיו, ההערכה לפי משפט הגבול המרכזי להסתברות

$$P(S_{2n} - T_{2n} \geq \sqrt{n}) \text{ היא בקירוב:}$$

(א) 0.16.

(ב) 0.35.

(ג) הקירוב הנורמלי לא חל על מקרה זה.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 5

הצפיפות המשותפת של X ו- Y נתונה ע"י

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ההסתברות $P(Y < 1)$ היא בקירוב:

(א) תלוי ב- x .

(ב) 0.26.

(ג) 0.63.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 6

בהמשך לשאלה 5, מהו ה- $Cov(X, Y)$?

(א) 0.

(ב) חיובי.

(ג) שלילי אך גדול מ-1.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 7

יהיו $X, Y \sim U(0, 2)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר את המאורעות $A = \{X < Y\}$ ו-1

$B = \left\{ |X - Y| < \frac{2}{3} \right\}$. אזי ההסתברות $P(A|B)$ שווה ל-

(א) $\frac{4}{9}$.

(ב) $\frac{1}{2}$.

(ג) $\frac{5}{9}$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

מרכיבים באקראי מילה באורך 10 באמצעות הספרות 0,1,...,9.

יהא Y מספר הספרות השונות המופיעות במילה שנבחרה. התוחלת $E[Y]$ היא:

(א) בין 7 ל-9.

(ב) בין 1 ל-3.

(ג) בין 4 ל-6.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 9

בהמשך לשאלה 8, התוחלת $E[Y^2]$ היא:

(א) בין 20 ל-22.

(ב) גדולה מ-24.

(ג) בין 17 ל-19.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 10

לסטודנט מגיעות הודעות בדואר האלקטרוני בזרם פואסוני בקצב של 5 הודעות אישיות ליום, ו-3 הודעות בענייני עבודה ליום (באופן בלתי תלוי זה בזה). כיצד מתפלג מספר ההודעות ביום.

- (א) בינומי.
- (ב) פואסוני.
- (ג) גיאומטרי.
- (ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 11

בהמשך לשאלה 10, ידוע כי ביום מסוים לא הגיעה אף הודעה אישית עד השעה 9:00. מה תוחלת הזמן שייאלץ הסטודנט להמתין (מעבר לשעה 9:00) עד להגעת הודעה אישית?

- (א) בין 4 ל-5 שעות.
- (ב) פחות מ-3 שעות.
- (ג) לא ניתן לדעת מנתוני השאלה.
- (ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 12

יהי X משתנה מקרי המפולג נורמלית עם תוחלת μ וסטיית תקן σ . מהו σ אם ידוע כי $P(X \leq 160) = 0.5$ וכן $P(X \leq 140) = 0.25$.

- (א) $\sigma \in [29, 30]$.
- (ב) $\sigma \in [0, 1]$.
- (ג) $\sigma \in [5, 15]$.
- (ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 13

משתנה מקרי X מפולג $U(50,100)$.

משתנה מקרי Y בהינתן $X = x$ מפולג מעריכית עם פרמטר $x \cdot \exp(x)$.

מהו $E[Y | X = 70]$.

(א) 70.

(ב) $\frac{1}{70}$.

(ג) 1.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 14

בהמשך לשאלה 13, התוחלת $E[Y^2]$:

(א) גדולה מ- $E[X]$.

(ב) קטנה מ- $E[Y]$.

(ג) תלויה בערך x .

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 15

שני סטטיסטיקאים בלתי תלויים, לקחו כל אחד מדגם מקרי פשוט בגודל 15, במטרה להעריך בעזרת ממוצע המדגם את ממוצע מספר שעות הגלישה היומית באינטרנט בקרב לדי הגן. סטיית התקן של שעות הגלישה היא σ .

יהיו \bar{X}_{15} ו- \bar{Y}_{15} ממוצעי המדגמים של סטטיסטיקאי 1 ו-2, בהתאמה. מצא חסם עליון להסתברות

$P(|\bar{X}_{15} - \bar{Y}_{15}| > 3\sigma)$, בעזרת אי שוויון צ'בישב.

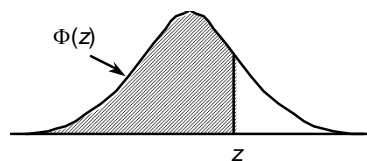
(א) $\frac{1}{135}$.

(ב) $\frac{1}{9}$.

(ג) $\frac{2}{135}$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995