

מספר ת.ז. _____ מספר נבחן _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשע"ג

כהן אסף

1. ענו על 15 השאלות הבאות.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סה"כ: 105 נקודות, הציון המקסימלי הוא 100.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות (דו-צדדיים) ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. יש לסמן את התשובות בטבלה הבאה בלבד. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה. לכל שאלה יש לסמן רק תשובה אחת! ייבדקו רק הסימונים בטבלה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטיוטא בלבד ולא ייבדקו.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
א															
ב															
ג															
ד															

מספר תשובות נכונות: _____

ציון: _____

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
מחוץ לאתר של שלומי.

בכד יש X כדורים לבנים ($0 \leq X \leq 100$, הוא מ"מ) ו- $100 - X$ כדורים שחורים.
 ערכו של X והתפלגותו לא ידועים אך ידוע כי $E(X) = V(X) = 25$.
 מוציאים שני כדורים בלי החזרה.

$$E\left(\frac{X}{100}\right)$$

1. מהו הסיכוי שהכדור הראשון לבן?

א. $\frac{1}{2}$

ב. $\frac{1}{4}$ (ב)

ג. לא ניתן לחישוב ללא ההתפלגות של X .

ד. אף אחד מהנ"ל.

$$E\left(\frac{X(X-1)}{100 \cdot 99}\right)$$

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 25 + 625 = 650$$

$$= 25 + 625 = 650$$

2. מהו הסיכוי ששני הכדורים לבנים?

א. $\frac{625}{9900}$ (א)

ב. $\frac{650}{9900}$

ג. $\frac{675}{9900}$

ד. אף אחד מהנ"ל.

$$\text{Cov}(X+Y, Y) =$$

$$= \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Y) = V(Y)$$

$$\rho(X+Y, Y) = \frac{\text{Cov}(X+Y, Y)}{\sqrt{V(X+Y)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \frac{V(Y)}{\sqrt{2V(Y)} \sqrt{V(Y)}}$$

יהיו $X, Y \sim G(p)$ ב"ת, כאשר $p \in (0, 1)$.

3. מה מהבאים בהכרח מתקיים?

א. $\rho(X+Y, Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (א)

ב. $\rho(X+Y, Y) = 1$

ג. $\rho(X+Y, Y) = \frac{1}{p}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

$$\sum (p \cdot q^{k-1})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} =$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}$$

4. מהו הסיכוי $P(X=Y)$?

א. $\frac{p^2}{1-p^2}$

ב. $\frac{p}{1-p^2}$

ג. $\frac{p}{2-p}$ (ג)

ד. אף אחת מהנ"ל.

ספי, עובדיה, ופנינה מטילים כל אחד בתורו קוביה הוגנת (בעלת 6 פאות). ספי מנסה להשיג את התוצאה 1, עובדיה מנסה להשיג את אחת מהתוצאות 2 או 3, ואילו פנינה מנסה להשיג את אחת מהתוצאות 4, או 5, או 6. מי שמושיג את התוצאה אותה הוא מנסה להשיג ראשון מוכרז כמנצח. ספי מטיל ראשון, עובדיה שני, ופנינה שלישית.

5. למי מהבאים יש את הסיכוי הנמוך ביותר לניצח?
 א. ספי.
 ב. עובדיה.
 ג. פנינה.
 ד. אף אחת מהנ"ל.

$$P(\text{ספי}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{60}{216}}$$

6. כיצד מתפלג מספר ההטלות של עובדיה?

א. $G(\frac{1}{3})$
 ב. $G(\frac{13}{18})$
 ג. $G(\frac{1}{2})$
 ד. אף אחת מהנ"ל.

יתכן שפגא כלם לא מנצח קדיות.

7. בהינתן שפנינה ניצחה, כיצד מתפלג מספר ההטלות של עובדיה?
 א. פואסוני.
 ב. גאומטרי.
 ג. בינומי שלילי שאינו גאומטרי.
 ד. אף אחת מהנ"ל.

יש יחס קדום של $\frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6}$
 קבין הפסכוי שפגא ט"ס $k+1$
 קבין הפסכוי שפגא ט"ס k

8. אם ידוע שבמהלך ה-60 הטלות הראשונות לא נקבע המנצח (כלומר כל אחד הטיל 20 פעמים ולא ניצח), מה תוחלת מספר השישיות שיצאו ב-60 הטלות אלו?

א. $\frac{1}{3}$
 ב. $\frac{9}{3}$
 ג. 3
 ד. אף אחת מהנ"ל.

פריטלות של קבנה אין 6, פריטלות של ספי פן כם אלת 6 קסכו' $\frac{1}{5}$ ופריטלות של עובדיה כם אלת $\frac{1}{4}$
 $20 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{4}$

9. יהיו X, Y מ"מ כלשהם בעלי תוחלות ושוניות סופיות. מה מהבאים בהכרח מתקיים:

א. קיים לפחות k אחד כך ש- $E(X|Y=k) \geq E(X)$
 ב. $|Cov(X, Y)| \leq V(X)V(Y)$
 ג. $V(X+Y) \leq V(X) + V(Y)$
 ד. אף אחת מהנ"ל.

פריטלות פיא שקלום של מקימ.

יהיו $X, Y \sim U(0,1)$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה (רציפה) בקטע $(0,1)$. נגדיר $Z = X + Y$.

10. מהי הצפיפות של Z , $f_z(t)$:

עקור $0 < t \leq 1$: $f_z(t) = \int_0^t f_x(x) \cdot f_y(t-x) dx = \int_0^t 1 dx = t$

עקור $1 < t \leq 2$: $f_z(t) = \int_{t-1}^1 f_x(x) \cdot f_y(t-x) dx = \int_{t-1}^1 1 \cdot (t-x) dx = 1 - (t-1) = 2-t$

אחרת $f_z(t) = 0$

א. $f_z(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ב. $f_z(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ג. $f_z(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ t-1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

11. חשבו את $E[X+Y]$, כאשר הפונקציה היא פונקצית הערך השלם התחתון $[x]$

של x :

א. $\frac{2}{3}$

ב. $\frac{1}{2}$

ג. $\frac{3}{4}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

מש' קואלי סומ' יהי מתק"ם $0 \leq x+y < 1$

קס' כול' חצי $1 \leq x+y \leq 2$

אכן התחלת פטל $\frac{1}{2}$

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim U(-1,1)$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה (רציפה) בקטע $(-1,1)$. נגדיר

$M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

12. מהי הצפיפות של M , $f_M(t)$:

א. $f_M(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{n-1} & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

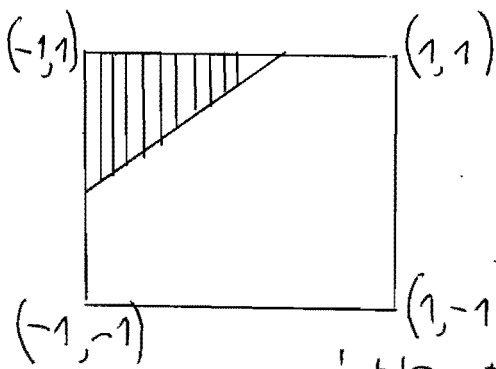
ב. $f_M(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ג. $f_M(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-1} & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

$P(M \leq t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^n$

ויש אמצור אלת פונקצית
הרסטקיות הנתונות.



5

13. מהו הסיכוי $P(X_2 > X_1 + 1)$:

מתפלגים את הפטת פ'חס'.

א. $\frac{1}{6}$

ב. $\frac{1}{8}$ (ב)

ג. $\frac{1}{4}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

14. מהו הסיכוי $P(M > X_1 + 1)$ אם

אם $(M < X_1)$, אז כאשר $h \rightarrow \infty$, נב
 יקרפ בונבאות. אכן כנזחם כאשר $h \rightarrow \infty$
 כוא ח'ז', נב אא תאא את א'ל, ל'ג'.

א. $\frac{1}{8^{n-1}}$

ב. $1 - \frac{1}{4^{n-1}}$

ג. $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

ד. אף אחת מהנ"ל. (ד)

15. לכל $n \geq 1$ נגדיר את המ"מ הבא $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, לאיזה קטע שייך הגבול

$\forall i: V(X_i) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}, V(S_n) = \frac{n}{3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^2 \leq \frac{n}{9})$

א. $[0, 0.25)$

ב. $[0.25, 0.5)$ (ב)

ג. $[0.5, 0.75)$

ד. אף אחת מהנ"ל.

$\sqrt{V(S_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}$

$P(S_n^2 \leq \frac{n}{9}) = P(|S_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{3}) \approx \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$