

מספר ת.ז. \_\_\_\_\_ מספר נבחן \_\_\_\_\_

## הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשע"ג

כהן אסף

1. ענו על 15 השאלות הבאות.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סה"כ: 105 נקודות, הציון המקסימלי הוא 100.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות (דו-צדדיים) ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. יש לסמן את התשובות בטבלה הבאה בלבד. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה. לכל שאלה יש לסמן רק תשובה אחת! ייבדקו רק הסימונים בטבלה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטיוטא בלבד ולא ייבדקו.

**בהצלחה!**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
א															
ב															
ג															
ד															

מספר תשובות נכונות: \_\_\_\_\_

ציון: \_\_\_\_\_

© כל הזכויות שמורות  
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם  
 מחוץ לאתר של שלומי.

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  סדרת מ"מ ברנולים ב"ת עם אותו פרמטר  $p \in (0,1)$ .

לכל  $n \geq 1$  טבעי נגדיר את המ"מ הבא  $S_n = \left\lfloor \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right\rfloor$ , כאשר הפונקציה  $\lfloor x \rfloor$  היא פונקצית הערך השלם התחתון של  $x$ .

1. חשבו את הסיכוי הבא  $P(S_n = 0)$ :

- א.  $1 - p^n$
- ב.  $(1-p)^n$
- ג.  $(1-p)^n p$
- ד. אף אחד מהנ"ל.

אם לא כל הן האפשרויות

2. כיצד מתפלג  $S_n$ ?

$\text{Bin}(1, p^n)$

- א. היפרגאומטרית.
- ב. גאומטרית.
- ג.  בינומית.
- ד. אף אחד מהנ"ל.

3. לכל  $m \geq n \geq 1$  חשבו  $\rho(S_n, S_m)$ :  $\text{Cov}(S_n, S_m) = E(S_n \cdot S_m) - E(S_n) \cdot E(S_m)$

- א.  $\sqrt{\frac{p^n}{1-p^n} \cdot \frac{1-p^n}{p^n}}$
- ב.  $\frac{1}{p^n(1-p^n)}$
- ג.  $\frac{p^n}{(1-p)^m} \cdot \frac{(1-p)^n}{p^n}$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

$$= p^m - p^n \cdot p^m$$

$$V(S_n) = p^n(1-p^n) \quad V(S_m) = p^m(1-p^m)$$

$$\rho(S_n, S_m) = \frac{\text{Cov}(S_n, S_m)}{\sqrt{V(S_n) \cdot V(S_m)}}$$

4. לכל  $n \geq 1$  חשבו  $\text{Cov}(S_n, X_n)$ :

- א.  $1 - p^n$
- ב.  $p^n(1-p)$
- ג.  $p^{n-1} - p^n$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

$$E(S_n \cdot X_n) - E(S_n) \cdot E(X_n) = p^n - p^n \cdot p$$

( $X_n=1$ ) א"כ ( $S_n=1$ ) א"כ  $p$  כנ"ל

5. כיצד מתפלג  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ ?

קבצים פתולוגיים ( $X_n=0$ ) ע"י  $S_n$

כל  $m \geq h$  מתקיים  $(S_m=0)$

כך מתקיים  $S_n$  פתולוגי

מתקדם ע"י 0.

- א. בינומית.
- ב.  גאומטרית.
- ג. בינומית שלילית שאינה גאומטרית.
- ד. אף אחת מהנ"ל.



9. יהיו  $A, B$  מאורעות המקיימים  $P(A) = 0.8, P(B|A) = 0.5$ , מה מהבאים בהכרח מתקיים?

$$P(B) \leq P(\bar{A}) + P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= 0.2 + 0.8 \cdot 0.5$$

$$P(B) \geq P(A) \cdot P(B|A)$$

- א.  $A \cap B, A \cap B^c$  ב"ת.
- ב.  $P(A) > P(B)$
- ג.  $P(B) \geq \frac{P(A)}{2}$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

10. יהיו  $X \sim G(p), Y \sim Bin(n, p)$  כלשהם, כאשר  $p \in (0, 1), n > 1$  כלשהם, מה מהבאים בהכרח מתקיים?

- א.  $E(X) < E(Y)$  אבל "ב" לא בהכרח מתקיים.
- ב.  $P(Y > X) = 1$
- ג.  $\rho(X, Y) < 1$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-ממדי בעל הצפיפות המשותפת

בועקנית הפלגות השוליות  $X$  פ"א  $(c+6)e^{-cx}$  עבור  $x > 0$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (c+6)e^{-cx} & x > y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

11. חשבו את הפרמטר  $c$ :

- א. 3
- ב. 6
- ג. 9
- ד. אף אחת מהנ"ל.

\* פ"א של  $Y$  הוא הפלגות של משתנה  $Exp(c)$ .

12. מה מהבאים בהכרח מתקיים?

- א. לכל  $x > 0$  המ"מ  $Y|X=x$  הוא בעל התפלגות מעריכית שתלויה ב  $x$ .
- ב. לכל  $x > 0$  המ"מ  $Y|X=x$  הוא בעל התפלגות אחידה שאינה תלויה ב  $x$ .
- ג. לכל  $x > 0$  המ"מ  $Y|X=x$  הוא בעל התפלגות אחידה שתלויה ב  $x$ .
- ד. אף אחת מהנ"ל.

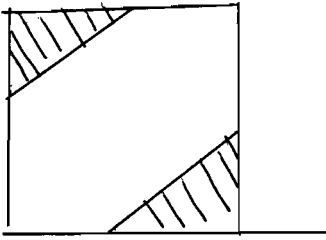
$U(0, x)$

13. חשבו  $E(\frac{Y}{X})$ :

- א.  $\infty$
- ב.  $\frac{1}{3}$
- ג. 3
- ד. אף אחת מהנ"ל.

קפ"מ של  $X$  זיק של  $X$ , הפלגות של  $X$  פ"א  $\frac{x}{2}$  אם קפ"מ של  $X$  זיק של  $X$  הפלגות פ"א  $\frac{1}{2}$  אם  $X$  זיק של  $X$  הפלגות פ"א  $\frac{1}{2}$ .

יהיו  $X, Y \sim U(0,1)$  מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה (רציפה) בקטע  $(0,1)$ . נגדיר  $Z = |X - Y|$ .



14. מהי הצפיפות של  $Z$ ,  $f_z(t)$ ?

א.  $f_z(t) = \begin{cases} 2(1-t) & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  (A)

ב.  $f_z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

\* otherwise

ג.  $f_z(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

מתקיים (פחוסרת פס) חיס (המסומנים) א/ב-בן גללים את בולקניג (ההתעל) המצטרף לר,  $f_z(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

15. חשבו את  $V(|X - Y|)$ :

א.  $\frac{91}{18}$

ב.  $\frac{1}{18}$  (B)

ג.  $\frac{91}{720}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

$F_z(t) = 1 - 2 \frac{(1-t)^2}{2}$

$E(Z) = \int_0^1 2(1-z)z dz = \dots = \frac{1}{3}$

$E(Z^2) = \int_0^1 2(1-z) \cdot z^2 dz = \dots = \frac{1}{6}$

$V(Z) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$