

מספר ת.ז. _____ מספר נבחן _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשע"ב

כהן אסף

1. ענו על 15 השאלות הבאות.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סה"כ: 105 נקודות, הציון המקסימלי הוא 100.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות (דו-צדדיים) ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. יש לסמן את התשובות בטבלה הבאה בלבד. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה. לכל שאלה יש לסמן רק תשובה אחת! ייבדקו רק הסימונים בטבלה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטייטא בלבד ולא ייבדקו.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
א					X	X				X		X			X
ב	X			X				X						X	
ג		X					X		X				X		
ד			X								X				

מספר תשובות שגויות: _____

מספר תשובות נכונות: _____

ציון: _____

בחבילת דומינו (לא סטנדרטית) ישנן אבנים ובהם כל הזוגות האפשריים הלא סדורים (כלומר, כל זוג ספרות מופיע בדיוק פעם אחת) של המספרים 0,1,...,7 (סה"כ 8 ספרות) כולל ה"דאבלים" (כלומר, אבן אחת של שני אפסים, אבן אחת של שני אחדים, וכו'). פידל הקובני בוחר 8 אבנים באקראי (ללא החזרה).

1. מה הסיכוי שיש ברשותו בדיוק 3 דאבלים?

- א. $\frac{\binom{8}{3}\binom{24}{5}}{\binom{32}{8}}$
- ב. $\frac{\binom{8}{3}\binom{28}{5}}{\binom{36}{8}}$
- ג. $\frac{\binom{8}{3}\binom{20}{5}}{\binom{28}{8}}$
- ד. אף אחת מהנ"ל.
- א' 8 אבנים של "דאבלים" $\binom{8}{2} = 28$ אבנים אחרות.

2. ראול בוחר אבן באקראי מתוך האבנים שבחר פידל ומבין 2 הספרות שרשומות עליה בוחר ספרה באקראי. מה הסיכוי שהספרה שבחר גדולה ממש מהספרה השניה?

- א. $\frac{1}{2}$
- ב. $\frac{3}{8}$
- ג. $\frac{7}{18}$
- ד. אף אחת מהנ"ל.
- הוא צ'יק אקדור אבן שאינה של "דאבלים" ואם הסכמי פטא חצי,
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{28}{36} = \frac{7}{18}$

3. מה תוחלת סכום הספרות (סה"כ שש-עשרה ספרות) שיש לפידל?

- א. 64
- ב. 68
- ג. 72
- ד. אף אחת מהנ"ל.
- בתוחלת של כל ספרה פטא 3.5
- $16 \cdot 3.5 = 56$

4. יהיו A, B מאורעות המקיימים $P(A) + P(B) = 1$, מה מהבאים בהכרח מתקיים:
- א. $P(A \cup B) < 1$.
 ב. $P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$.
 ג. $P(A|B) = P(A)$.
 ד. אף אחת מהנ"ל.
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \stackrel{||S||}{=} 1 - P(A \cup B)$
 $P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \stackrel{||S||}{=} 1 - P(A \cup B)$

אפרים השיכור עומד בנקודה 0. בכל שניה הוא מבצע צעד באורך 1, בסיכוי p ימינה (בכיוון החיובי של ציר המספרים) ובסיכוי $1-p$ שמאלה, באופן ב"ת בצעדים האחרים, $(0 < p < 1)$.

5. מה הסיכוי שהפעם הראשונה שיגיע לאחת מהנקודות $-1, +2$ יהיה בצעד השביעי?
- א. $(1-p)^4 p^3$.
 ב. $\binom{7}{4} (1-p)^3 p^4$.
 ג. $(1-p)^6 p$.
 ד. אף אחת מהנ"ל.
- צ'כ'ק 3 כאלות מסוג אחד 3 כאלות מסוג שני ואם צ'כ'ק הפ'ל'חה.

6. מה הסיכוי שיגיע לנקודה -1 לפני שיגיע לנקודה $+2$?

- א. $\frac{1-p}{1-p+p^2}$.
 ב. $\frac{p}{1-p^2}$.
 ג. $\frac{1-p^2}{1+p^3}$.
 ד. אף אחת מהנ"ל.
- $\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} \cdot p^k = \frac{1-p}{1-p(1-p)} = \frac{1-p}{1-p+p^2}$

7. כיצד מתפלג מספר הצעדים עד שמגיע לראשונה לאחת מהנקודות $-1, +2$?

- א. $G(p)$ לכל $0 < p < 1$.
 ב. $NB(2, p)$ לכל $0 < p < 1$.
 ג. $G(0.5)$ עבור $p = 0.5$ ולכל p אחר בקטע $(0, 1)$ לא מתפלג גאומטרית.
 ד. אף אחת מהנ"ל.

אם $p = 0.5$ אם שלי פ'ם ס'ק אם הפ'צ'נו
 אלו'ם אם יש בו ס'כ'ו הפ'צ'חה אם 0.5.
 אחרת אם $p \neq 0.5$ סכ'ו הפ'צ'חה
 ק'ס'ק ק'פ'יתן ש'ה'צ'ט אלו'ם אלו'ם ק'ד'ו'צ'ם.

8. יהיו המ"מ הבאים:

$X_n =$ מספר הצעדים שצעד שמאלה מתוך n הצעדים הראשונים,

$Y_n =$ מספר הצעדים שצעד ימינה מתוך n הצעדים הראשונים.

מהו הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{1}{n}X_n, nY_n\right)$?

א. 0
 ב. -1
 ג. הגבול אינו קיים.
 ד. אף אחת מהנ"ל.

למה? עזרו $d > 0$ מתקיים
 $\rho(cx, dY) = \rho(x, Y)$

כיון ש X_n ו Y_n יש קשר ליניארי יורד, לכן
 כמות אס קין X_n ו Y_n הם -1.

9. יהיו המ"מ $X, Y \sim Bin(n, p)$, אזי המשוואה $E\left[\ln\left(\frac{X+1}{Y+1}\right)\right] = 0$ מתקיימת:

א. אם ורק אם X, Y ב"ת.
 ב. אם ורק אם X, Y בלתי תלויים וגם $p = 0.5$.
 ג. ללא הגבלה נוספת על X, Y .
 ד. אף אחת מהנ"ל.

הם שני ההתפלגות ועזין שני התפלגות,
 $\ln\left(\frac{X+1}{Y+1}\right) = \ln(X+1) - \ln(Y+1)$

יהי X מ"מ בעל הצפיפות הבאה:

$$f_X(t) = \frac{1}{9}te^{-\frac{t}{3}}, t > 0, \text{ ואחרת } 0.$$

$$Y|_X \sim U(0, X)$$

10. מהי הצפיפות המותנית $f_{X|Y=y}(x)$?

$$\frac{\frac{1}{x} \frac{1}{9} x \cdot e^{-\frac{x}{3}}}{\int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{9} x \cdot e^{-\frac{x}{3}} dx} = \frac{\frac{1}{9} e^{-\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}} dx} = \frac{\frac{1}{9} e^{-\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x-y}{3}} & x > y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}xe^{-\frac{x-y}{3}} & x > y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-y)e^{-\frac{x-y}{3}} & x > y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ד. אף אחת מהנ"ל.

$$E(Y) = E(X)/2$$

5

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{9t^2} \cdot e^{-\frac{t}{3}} dt$$

קט"ו נכ פטל $N \frac{1}{3}$
 בלש $E(T^2)$: $T \sim \text{exp}(\frac{1}{3})$

$$E(T^2) = V(T) + E^2(T) = 9 + 9$$

11. מהי $E(Y)$?

- א. $\frac{7}{2}$
- ב. $\frac{5}{2}$
- ג. $\frac{3}{2}$
- ד. $\frac{1}{2}$

אף אחת מהנ"ל. ד.

12. הסיכוי $P(X > 2Y)$ שווה ל:

קפניטן כמ עק של א, י מתפלס
 אלז קן ס δ א

- א. $\frac{1}{2}$
- ב. $\frac{1}{3}$
- ג. $\frac{1}{6}$
- ד. $\frac{1}{4}$

אף אחת מהנ"ל.

יהי המעגל החשמלי הבא:



זרם יעבור בין A לב א אם ורק אם שני המפסקים יהיו סגורים.
 בזמן $t=0$ שני המפסקים סגורים.

יהיו המ"מ הבלתי תלויים הבאים $X_1 \sim \text{exp}(\lambda)$, $X_2 \sim \text{exp}(2\lambda)$ ($\lambda > 0$)

כאשר X_i הוא משך הזמן עד שמפסק i נפתח, ($i=1,2$). אחרי שמפסק נפתח הוא לא

נסגר שוב. יהי $T = \min\{X_1, X_2\}$ משך הזמן שבו זורם זרם בין A לב.

13. מה הצפיפות של T ?

כמ"מ נ"מ של ע"י
 נ"מ כ"מ ג"י

א. $\lambda e^{-\lambda t} + 2\lambda e^{-2\lambda t} - 3\lambda e^{-3\lambda t}$ עבור $t > 0$, ואחרת 0.

ב. $\frac{\lambda e^{-\lambda t} + 2\lambda e^{-2\lambda t}}{2}$ עבור $t > 0$, ואחרת 0.

ג. $3\lambda e^{-3\lambda t}$ עבור $t > 0$, ואחרת 0.

ד. אף אחת מהנ"ל.

$$P(X_1 > a, X_2 > a) = \dots$$

14. מה ניתן לומר על $P(T < X_2)$ כפונקציה של λ בתחום $0 < \lambda$?

א. $P(T < X_2)$ עולה ממש כפונקציה של λ .

ב. $P(T < X_2)$ קבועה לכל λ .

ג. $P(T < X_2)$ יורדת ממש כפונקציה של λ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{-2\lambda t} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} 3\lambda e^{-3\lambda t} dt = \frac{1}{3}$$

15. יהי $X \sim N(8, 10^2)$ לאיזה קטע שייכת ההסתברות $P(X^2 - 17X < -70)$?

א. $[0, 0.25)$

ב. $[0.25, 0.5)$

ג. $[0.5, 0.75)$

ד. אף אחת מהנ"ל.

שאלה זו היא בעיה של חישוב סטיות בקבוצה אחת.

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
מחוץ לאתר של שלומי.