פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' רון פלד מ 13/03/15

חלק א

סעיף א

לכל i מתקיים $E(Y_i)=0$ לכן $E(T_n)=0$.

מתקיים $E(Y_i^2)=P(X_i=1)+P(X_i=-1)=1-\frac{1}{2^i}$. לכן $V(Y_i)=1-\frac{1}{2^i}$.

T_n הוא סכום של משתנים מקריים ב"ת. לכן $V(T_n)=\sum_{i=1}^{n}V(Y_i)=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=\cdots$.

סעיף ב

מתקיים $E(T_n)=0$ ו $V(T_n)<n$. לכן $V\left(\frac{T_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(T_n)<\frac{1}{n}$.

נשתמש באי שיוויון צ'בישב:

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n}\right|>\varepsilon\right)<\frac{V\left(\frac{T_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}<\frac{1}{n\varepsilon^2}$$

גודל זה שואף לאפס כאשר $n\to\infty$.

סעיף ג

הסתברות איחוד לא גדולה מסכום ההסתברויות. יש כאן מאורעות בעלי הסתברויות $\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k+1}},\cdots,\frac{1}{2^n}$. מתקיים $\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{2^i}<\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

סעיף ד

פתרון שאלה זו מתבסס על חלוקה למקרים. בחירת הגודל $\ln(\ln(n))$ היא שרירותית. נחלק לשני מקרים לפי התרחשות או אי התרחשות של לפחות מאורע אחד $(X_i=2^i)$ עבור $i\geq\ln(\ln(n))$.

מכיון ש $\ln(\ln(n))$ שואף לאינסוף כאשר $n\to\infty$, אז לפי סעיף ג' ההסתברות שיהיה קיים $i\geq\ln(\ln(n))$ כך ש $(X_i=2^i)$ שואפת לאפס כאשר $n\to\infty$. אם עבור כל $i\geq\ln(\ln(n))$ מתקיים $(X_i\neq 2^i)$, אז מתקיים $|S_n|\leq|T_n|+\sum_{i=1}^{\lfloor\ln(\ln(n))\rfloor}2^i$. לפי סעיף ב' מתקיים $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{T_n}{n}\right|>\varepsilon\right)=0$. מתקיים גם $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\lfloor\ln(\ln(n))\rfloor}\frac{2^i}{n}=0$.

הערה

אמנם בחירת הפונקציה $\ln(\ln(n))$ היא שרירותית, אבל היינו צריכים לבחור פונקציה ששואפת לאינסוף, אבל לא מהר מידי.

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ג	א	א	א	ג	א	א	ב	ב	ד	א	ב

הסברים קצרים

שאלה 1

מטבע מראה "עץ" בשלב מסוים אם היו במצבו מספר זוגי של מהפכים עד שלב זה.

ההסתברות למספר זוגי של מהפכים בראשון ב 3 שלבים היא $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3$,

בשני היא $\frac{14}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$ ובשלישי $\frac{35}{54}=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$.

תוחלת סכום האינדיקטורים היא $\frac{1}{2}+\frac{14}{27}+\frac{35}{54}=\frac{5}{3}$.

שאלה 2

מצבי התהליך הם $uuu, uud, udu, udd, duu, dud, ddu, ddd$.

מטריצת המעבר של התהליך המתאר את התהליך היא

$$\begin{pmatrix}
0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0
\end{pmatrix}$$

זו שרשרת בלתי פריקה. זו שרשרת דו סטוכסטית. לכן, לכל מצב יש את אותה הסתברות סטציונרית. מספר המצבים שבהם $(X_n=2)$ הוא שלושה. השכיחות היחסית של ביקורים במצב, תמיד שואפת להסתברות הסטציונרית שלו (בלי קשר למחזוריות).

<u>שאלה 3</u>

$(X_n=0)$ מיוצג רק על-ידי המצב האחרון. למצב זה יש הסתברות סטציונרית חיובית והוא מחזורי. לכן אין לו הסתברות גבולית.

<u>שאלה 4</u>

שני מטבעות אלה מראים "עץ" במצבים 1 ו 5. אמנם השרשרת מחזורית, אבל לשני מצבים אלה יש הסתברויות סטציונריות זהות ולאחד מהם ניתן להגיע בזמנים זוגיים בזמן שלאחר בזמנים אי זוגיים. ההסתברות הגבולית של כל אחד מהם בזמנים שבהם ניתן להגיע אליו

היא $\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4}$, כאשר $1/2$ הוא סכום ההסתברויות הסטציונריות של המצבים שאליהם ניתן להגיע באותם זמנים.

<u>פתרון בדרך נוספת</u>

לתהליך המתאר רק את מצבי שני מטבעות אלה יש מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

זו שרשרת בלתי פריקה ולא מחזורית (ניתן לעבור ממצב לאותו מצב). מטריצת המעבר היא דו סטוכסטית ולכן לכל המצבים יש אותה הסתברות סטציונרית.

<u>שאלה 5</u>

בהינתן המאורע B , ההסתברות המותנה שנולדו שני גורים ממין זכר היא $\frac{0.5^2}{1-0.5^2}=\frac{1}{3}$

וההסתברות המותנה שנולד בדיוק זכר אחד היא $\frac{2}{3}$. סיכויו של דוליטל לפגוש גור ממין זכר הם $\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

<u>שאלה 6</u>

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)P(E|A)}{P(E)}=\frac{0.5^4\left[\frac{4}{12}\cdot 1+\frac{8}{12}\cdot\frac{1}{2}\right]}{0.5}$$

<u>שאלה 7</u>

תוחלת מספר הבנים היא $\frac{n}{2}$. שונות מספר הבנים היא $n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

נשתמש במשפט הגבול המרכזי.

שאלה 8

k הראשונים הם זכרים. כל אחד אחר הוא זכר בסיכוי חצי. לכן הסיכוי לבחירת זכר הוא

$$\frac{k}{n}\cdot 1+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}$$

הגבול של ביטוי זה כאשר $n\to\infty$ הוא $\frac{3}{4}$.

שאלה 9

$$P(X>Y)=\sum_{y=1}^{\infty}P(Y=y)P(X>y)=\sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{y}=\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$$

שאלה 10

$$P(X=x\mid X=Y)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

לכן ההתפלגות המותנה היא $G\left(\frac{2}{3}\right)$ והתוחלת המותנה היא $\frac{3}{2}$.

שאלה 11

בכל שלב שבו עדיין לא היתה הצלחה למשהו משלושתם, הסיכוי להצלחה של לפחות אחד מהם היא $1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$. לכן התפלגות המינימום היא $G\left(\frac{8}{9}\right)$ ותוחלת המינימום היא $\frac{9}{8}$.

שאלה 12

$$Var(XY)=E\left((XY)^2\right)-E^2(XY)=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)-1$$

(הודות לאי תלות, תוחלת רבוע המכפלה שווה למכפלת תוחלות הרבועים, מכיון שהשונויות סופיות, אז גם $E\left(X^2\right)<\infty$ ו $E\left(Y^2\right)<\infty$).

מתקיים $E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)=V(X)+E^2(X)=2$.

שלומי