

## בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.  
מותר להשתמש במחשב כיס.  
בבחינה יש 4 שאלות. ענו על כל השאלות.  
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.  
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.  
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

### שאלה 1 (30 נקודות)

ליאם מבצע סדרת הטלות ב"ת של קוביה תקינה.  
איליי מבצע סדרת הטלות ב"ת של קוביה תקינה.  
תוצאות ההטלות של ליאם הן ב"ת בתוצאות ההטלות של איליי.  
יהי  $X$  מספר ההטלות של ליאם עד שהוא מקבל תוצאה 1.  
יהי  $Y$  מספר ההטלות של ליאם עד שהוא מקבל תוצאה 2.  
יהי  $Z$  מספר ההטלות של איליי עד שהוא מקבל תוצאה 1.

- א. מהי ההתפלגות של  $\min\{X, Y\}$  ?  
ב. מהי ההתפלגות של  $\min\{X, Z\}$  ?  
ג. מהו  $E(Y|X = 1)$  ?

### שאלה 2 (20 נקודות)

מבצעים סדרת הטלות ב"ת של מטבע שבכל הטלה נופל על "עץ" בסיכוי  $\frac{1}{3}$  ועל "פלי" בסיכוי  $\frac{2}{3}$ .

- א. מהי ההסתברות שב 5 ההטלות הראשונות יהיו יותר תוצאות "פלי" מתוצאות "עץ" ?  
ב. מהי ההסתברות שתוצאות כל 101 ההטלות הראשונות הן זהות בהינתן שתוצאות כל 100 ההטלות הראשונות הן זהות ?  
תנו תשובה מדויקת או מקורבת בצורת שבר פשוט.

**שאלה 3** (40 נקודות)

תהי סדרת משתנים  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת משתנים.  
נניח שעבור כל  $1 \leq n < \infty$  מתקיים  $X_n \sim \text{Bin}(2n, 0.5)$ .  
עבור כל  $1 \leq n < \infty$  יהי המאורע  $A_n = \{|X_n - n| > 0.1\sqrt{n}\}$ .

- א.** האם ניתן למצוא  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$  בעזרת החוק החלש?  
**ב.** האם ניתן למצוא  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$  בעזרת אי שיוויון צ'בישב?  
**ג.** האם ניתן למצוא  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$  בעזרת משפט הגבול המרכזי?  
**ד.** האם תשובותיכם לחלק מהסעיפים הקודמים ישתנו אם נניח שסדרת המשתנים  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרת משתנים ב"ת?
- 

**שאלה 4** (20 נקודות)

המספר 237000 מסתנים בשלושה אפסים. המספר 10000040 מסתנים באפס אחד.

איליי בוחר ללא החזרה 75 מספרים מתוך קבוצת המספרים הטבעיים שבין 1 ל 100 ומכפיל אותם זה בזה.  
יהי  $X$  מספר האפסים שבהם מסתיימת המכפלה שמקבל איליי.  
ליאם בוחר עם החזרה 75 מספרים מתוך קבוצת המספרים הטבעיים שבין 1 ל 100 ומכפיל אותם זה בזה.  
יהי  $Y$  מספר האפסים שבהם מסתיימת המכפלה שמקבל ליאם.

- א.** הראו ש  $E(X)$  הוא מספר שלם.  
**ב.** האם  $E(Y)$  הוא מספר שלם?  
בסעיף ב' יש צורך להעלות רעיונות משכנעים. אין צורך לבססם בחישובים מדויקים.
-