

© כל הזכויות שמורות
קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 10.08.26

שאלה 1 סעיף א'

פתרון בדרך ראשונה

לכל אחד מהאינדיקטורים יש תוחלת $0.5 \cdot \frac{1}{4} + 0.5 \cdot \frac{3}{4} = 0.5$.
תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלת, ולכן היא שווה ל 4.

פתרון בדרך שניה

בסיכוי חצי התוחלת היא $2 = 0.25 \cdot 8$ (לפי תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות).
בסיכוי חצי התוחלת היא $6 = 0.75 \cdot 8$ (לפי תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות).
לפי עקרון התוחלת השלמה, התוחלת היא $4 = 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 6$.

הערות

ערכו של כל אידיקטור מרמז על זהות מי שגלן הודל צופה בו. לכן, האינדיקטורים הם תלויים.
הסכום לא מתפלג בינומית, למרות שמספר תוצאות ה"עץ" שמקבל בייל מתפלג בינומית
ומספר תוצאות ה"עץ" שמקבל קיין מתפלג בינומית.
מכיון "שמתחננים" עם אותו מטבע, אז האינדיקטורים הם תלויים. אם לא היו "מתחננים"
עם אותו מטבע אז ההוצאות היו בלתי תלויות.

שאלה 1 סעיף ב'

$$\begin{aligned} r(X_1, X_2) &= \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \\ &= \frac{(0.5 \cdot 0.25^2 + 0.5 \cdot 0.75^2) - 0.5 \cdot 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \end{aligned}$$

הסברים והערות

כאמור, בסעיף הקודם, האינדיקטורים הם תלויים.
תוצאה צריכה קודם כל להיות סבירה. ככל שיש יותר תוצאות "עץ" בשתי ההטלות
הראשונות, כן סביר יותר שהודל מסתכל על קיין, וסביר יותר שבפעמים הבאות יהיו תוצאות
"עץ". לכן, אין לצפות למתאם שלילי. סביר שהמתאם חיובי. אבל הוא לא יכול להיות שווה
לאחת. מתאם של אחת, מבטא קשר לינארי. קשר לינארי הוא קשר מוחלט. כאן אין קשר
מוחלט.
לכל אחד מהאינדיקטורים יש הסתברות חצי (שקלול בין רבע לשלושה רבעים). שונות של
אינדיקטור בעל הסתברות p שווה ל $p(1-p)$. בסיכוי של חצי יש שני אינדיקטורים בעלי
סיכוי רבע ובסיכוי חצי יש שני אינדיקטורים בעלי סיכוי שלושה רבעים. התוחלת של
אינדיקטור שווה לפרמטר שלו (בהסתברות ששווה לפרמטר שלו הוא מקבל את הערך אחד
ואחרת הוא מקבל את הערך אפס).

שאלה 1 סעיף ג'

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 = 3 | X_1 + X_2 = 2) &= \frac{P(X_1 + X_2 + X_3 = 3, X_1 + X_2 = 2)}{P(X_1 + X_2 = 2)} = \\ &= \frac{P(X_1 + X_2 + X_3 = 3)}{P(X_1 + X_2 = 2)} = \frac{0.5 \cdot 0.25^3 + 0.5 \cdot 0.75^3}{0.5 \cdot 0.25^2 + 0.5 \cdot 0.75^2} \end{aligned}$$

הערות

התוצאה צריכה להיות סבירה. היא חייבת להיות בין רבע לשלושה רבעים, כי יש רק מטבעות
של רבע ושל שלושה רבעים. מכיון שהתקבלו שני "עצים" סביר שהיא תהיה גדולה מחצי.

שאלה 1 סעיף ד'

יהי a – ההסתברות שגלן הודל צופה בסדרה של גארת בייל בהינתן שהוא בפעמיים הראשונות ראה פעמיים "עץ".

הסיכוי שבפעם השלישית הוא יראה "עץ" בהינתן שבפעמיים הראשונות הוא ראה "עץ" הוא $0.25a + 0.75(1 - a)$

נחשב את ערכו של a .

$$a = \frac{0.5 \cdot 0.25^2}{0.5 \cdot 0.25^2 + 0.5 \cdot 0.75^2}$$

(במכנה ההסתברות שהודל ראה פעמיים "עץ" ובמונה ההסתברות שהוא הסתכל על בייל וראה פעמיים "עץ").

שאלה 2 סעיף א'

התוחלת של משתנה $exp(1)$ היא 1. הביטוי שרשום הוא ממוצע רבועי הסטייה מהתוחלת. זו היא השונות (לפי הגדרתה ולא לפי נוסחא שהוכחה לפי ההגדרה). השונות של משתנה $exp(1)$ היא 1.

הערה

התוצאה צריכה להיות סבירה. רבוע הסטייה מקבוע הוא אף פעם לא שלילי, מצד שני הוא כאן כן מקבל ערכים חיוביים. לכן לא סביר שהתוחלת שלו תהיה שווה לאפס.

שאלה 2 סעיף ב'

$$E(X^8) = P(X < 2)E(X^8|X < 2) + P(X \geq 2)E(X^8|X \geq 2) \geq 0 + e^{-2}2^8 > 9$$

הסברים

המעבר הראשון הוא שימוש בעקרון התוחלת השלמה כאשר הבחירה בערך 2 היא שרירותית. המחבר הראשון הוא אי שלילי. אם מתקבל ערך של לפחות 2 אז החזקה השמינית היא לפחות 2^8 והתוחלת לא קטנה מהערך המינימלי שיכול להתקבל. ההסתברות לקבל ערך של לפחות 2 שווה למשלים של פונקציית ההסתברות המצטברת בנקודה 2. כאמור, הבחירה בערך 2 היא שרירותית. יכולנו לבחור ערכים אחרים. אם למשל היינו בוחרים בערך 3, אז היינו מקבלים חסם תחתון לתוחלת של $0 + e^{-3}3^8$ שגם הוא גדול מ 9. אבל אילו היינו בוחרים בערך 1, אז היינו מקבלים חסם תחתון $0 + e^{-1}1^8$ שכמובן קטן מ 9. לכן לא היינו מקבלים הוכחה לטענה. אבל זה לא היה אומר שהתוחלת קטנה מ 9, כי מדובר רק בחסם.

שאלה 3

משתנה $Bin(400, 0.5)$ הוא סכום של 400 אינדיקטורים ב"ת בעלי הסתברות חצי. המאורע שהמשתנה מקבל ערך לא גדול מ 220 הא אותו מאורע שממוצע האינדיקטורים לא גדול מ $\frac{220}{400}$. מכיון שהאינדיקטורים הם רבים, ב"ת, שווי התפלגות וכמובן בעלי שונות סופית, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי.

$$\phi\left(\frac{\frac{220}{400} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{400}}}\right) = \phi(2) \approx 0.9772$$
 נקבל קירוב

הביטוי הרשום באגף שמאל הוא קירוב שמתבסס על משפט הגבול המרכזי. הערך שמופיע באגף הימני מתקבל לפי טבלת ההתפלגות הנורמלית.

שאלה 4 סעיף א'

נצביע על מדיניות אפשרית. אם מתקבל "פלי" נבחר בהוגן בודאות. אם יתקבל "עץ" נבחר בהוגן בסיכוי רבע ובמוטה בסיכוי שלושה רבעים.

$$\text{אם מדובר בהוגן אז נצדק בסיכוי } 1 - 0.45 = 0.5 \cdot \frac{1}{4} + 0.5 \cdot 1.$$

$$\text{אם מדובר במוטה אז נצדק בסיכוי } 1 - 0.45 = 0.75 \cdot \frac{3}{4}.$$

הערות והסברים

צריכים להיות ערוכים לכך שהמטבע הוא משני סוגים אפשריים. המטבע אינו בסיכוי מסוים מסוג מסוים, לכן אין אפשרות לחשב סיכויים מותנים שהוא מסוג מסוים.

בחירת בהסתברויות רבע ושלושה רבעים אינה היחידה האפשרית. יכולנו למשל לבחור בהסתברויות חמישית וארבע חמישיות. היינו מקבלים שבמקרה של מטבע הוגן נצדק בסיכוי

$$0.6 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot \frac{1}{5} \quad \text{ובמקרה של מטבע מוטה נצדק בסיכוי } 0.6 = 0.75 \cdot \frac{4}{5}.$$

מה צריך להנחות אותנו? באופן טבעי כדאי ליחס תוצאת "פלי" למטבע ההוגן. אנחנו רואים שגם אם בודאות נייחס תוצאת "פלי" למטבע ההוגן עדיין לא נגיע לסיכוי של יותר מ $0.5 \cdot 1$ לבחור במטבע ההוגן במקרה שהמטבע הוגן. לכן צריך לייחס בסיכוי נמוך גם תוצאת "עץ" למטבע ההוגן. לכן בחרנו בסיכויים נמוכים כמו רבע או חמישית.

שאלה 4 סעיף ב'

אין מדיניות אפשרית.

לא מספיק להראות שמדיניות מסוימת (למשל מדיניות של סעיף א') אינה מתאימה. צריך להראות שכל מדוניות אינה מתאימה.

המוטה נותן "פלי" בסיכוי שלושה רבעים. אם במקרה של "עץ" נבחר במוטה בסיכוי לא גדול משני שליש אז נטעה במקרה של מוטה בסיכוי של לפחות $0.2 > 0.75 \cdot \frac{1}{3}$. אם במקרה של

"עץ" נבחר במוטה בסיכוי גדול משני שליש אז במקרה של הוגן נטעה בסיכוי של לפחות

$$0.2 > 0.5 \cdot \frac{2}{3}.$$

הערות

חייבים להראות שגם מדיניות אקראית לא תתאים כאן. לא מספיק להראות שמדיניות מסוימת (למשל מדיניות של סעיף א') אינה מתאימה. צריך להראות שכל מדוניות אינה מתאימה.

מי שנותנים בדיוק את אותו הסבר של סעיף א', אמורים לשאול את עצמם אם זו הכוונה. לצורך ההסבר, יכולנו להשתמש בערכים אחרים משליש ושני שליש. כדי לא לטעות יותר

מידי במקרה של מוטה, היינו צריכים במקרה של "עץ" לבחור בהוגן בסיכוי b שיקיים $0.2 < 0.75b$. ערכי b כאלה יגרמו שבמקרה של הוגן, נבחר בהוגן בסיכוי לא גדול מ $0.5 + 0.5b$, וזה סיכוי קטן מידי.

שאלה 4 סעיף ג'

כל צירוף של תוצאות אפשרי על-ידי כל אחד משני המטבעות. לכן אף פעם לא נוכל לדעת בודאות באיזה מטבע מדובר. נוכל לשפר את סיכוינו לבחור בהשערה הנכונה. אבל לודאות לא נוכל להגיע.

שאלה 5 סעיף א'

$$\frac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}} = \frac{5! \cdot 10!}{15!}$$

הסבר ראשון: לחמשת המעטפות שישלחו לגלן הודל צריך לבחור חמישה מכתבים. במאורע נגביל את עצמנו לכך שנבחר להן את חמשת המכתבים שמיועדים לגלן הודל. הסבר שני: את חמשת המכתבים שמיועדים לגלן הודל נחלק בין חמשת המעטפות שישלחו אליו, ואת עשרת המכתבים האחרים נחלק בין יתר האנשים.

הערה

בהינתן שמכתב מסוים הגיע להודל, הסיכויים של מכתב אחר להגיע להודל כבר אינם שווים לשליש.

שאלה 5 סעיף ב'

עשרת המכתבים שמיועדים לעשרת האנשים האחרים מחולקים ביניהם. כל אחד מעשרת האנשים האלה מקבל את המכתב שמיועד לו בסיכוי עשירית. תוחלת מספר המכתבים שמגיעים לאדם הנכון מבין עשרת אלה שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים שהוא אחד. אליהם יש להוסיף את חמשת המכתבים שיגיעו להודל. לכן תוחלת הסכום היא שש.

שלומי