מועד ב', סמסטר א', תשנ"ג
7.9.93

מס. תלמיד

בחינת מעבר
אלגברה ב' 1
פרופ' מ. הרצוג

חלק א'

משך הבחינה: 60 דקות. (לעולים חדשים 75 דקות)

אין להשתמש בחומר עזר וגם לא במחשבונים.

מספר השאלות: 15.

לכל שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.

סמן ☑ ליד התשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה	:	$6\frac{2}{3}$ נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת	:	0 נק'
תשובה לא נכונה	:	$-1\frac{1}{3}$ נק'

בהצלחה!

<u>שאלה 1</u>: מספר האינבולוציות ב-A_4 הוא:

☐ 2   ☐ 3   ☐ 4   ☐ 5

<u>שאלה 2</u>: תהי G חבורה מסדר 120 ונניח כי חבורות סילו-5 של G אינן נורמליות ב-G. אזי n_5, מספר חבורות 5-סילו ב-G, שווה ל:

☐ 6   ☐ 12   ☐ 21   ☐ 24

<u>שאלה 3</u>: יהי $Z(G)$ המרכז של החבורה G ותהי G' חבורת הקומוטטור של G. אזי הטענה: $G/Z(G)$ אבלית

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $Z(G) \trianglelefteq G$.

☐ לא נכונה כאשר $Z(G) \trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר $G' \leq Z(G)$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

<u>שאלה 4</u>: יהיו $\alpha=(123)(45)$ ו- $\beta=(143)(25)$ איברי S_5. אזי הסדר של מכפלתם $\alpha\beta$ הוא:

☐ 2   ☐ 3   ☐ 5   ☐ 6

שאלה 5: תהי T חבורה ציקלית מסדר $2^4\cdot 7^4$.
אזי מספר החבורות החלקיות של T הוא:

☐ 25 ☐ 20 ☐ 16 ☐ 8

שאלה 6: תהי $G^2=\langle g^2 | g\in G\rangle$ ותת"ח של החבורה G הנוצרת ע"י ריבועי איברי G ותהי $G^2 \le H \le G$.
אזי הטענה: $H \trianglelefteq G$

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $G' \le H$ (G' - חבורת קומוטטורים).
☐ לא נכונה כאשר $G' \le H$, אבל נכונה כאשר $G' \le G^2$.
☐ אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה.

שאלה 7: מספר האיברים מסדר 5 ב-S_5 הוא:

☐ 4 ☐ 20 ☐ 24 ☐ 30

שאלה 8. תהי G חבורה, $Z(G)$ מרכזה. אזי הטענה: $Z(G) \neq 1$:

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר G חבורה סופית.
☐ לא נכונה כאשר G חבורה סופית, אבל נכונה אם $|G|=p^n>1$, p ראשוני.
☐ אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה.

שאלה 9: מספר מחלקות הצמידות של איברים מסדר ראשוני ב-S_5 הוא:

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

שאלה 10: תהיינה H ו-K ת"ח של החבורה הסופית G.
אזי הטענה: HK היא ת"ח של G

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $H \trianglelefteq G$.
☐ לא נכונה כאשר $H \trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר גם H וגם K נורמליות ב-G.
☐ אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה.

שאלה 11: מספר האיברים מסדר 4 בחבורה הדיהדרלית D_8 מסדר 16 הוא:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 5 ☐ 6

שאלה 12: תהי S קבוצה חלקית של החבורה G.
אזי הטענה: $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם S ת"ח של G.
☐ לא נכונה כאשר $S \leq G$, אבל נכונה אם S ת"ח אבלית של G.
☐ אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה.

שאלה 13: תהי G חבורה מסדר $15m$, כאשר m הוא מספר טבעי זר ל-15, כלומר $(15,m)=1$. אזי הטענה: קיימת ב-G ת"ח מסדר 15 וכל שתי ת"ח מסדר 15 צמודות זו לזו

- ☐ נכונה תמיד.
- ☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם ת"ח 5-סילו של G נורמלית ב-G.
- ☐ לא נכונה כאשר ת"ח 5-סילו נורמלית ב-G, אבל נכונה אם גם ת"ח 5-סילו וגם ת"ח 3-סילו הן נורמליות ב-G.
- ☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

שאלה 14: תהי G חבורה סופית, $N,H \trianglelefteq G$ ונניח כי G/N, G/H הן חבורות ציקליות. אזי הטענה: G היא חבורה ציקלית

- ☐ נכונה תמיד.
- ☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $N\cap H=1$.
- ☐ לא נכונה כאשר $N\cap H=1$, אבל נכונה אם $N\cap H=1$ וגם $(|G/H|,|G/N|)=1$.
- ☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

שאלה 15: תהי $H\leq G$. אזי הטענה: $C_G(H) \trianglelefteq G$

- ☐ נכונה תמיד.
- ☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $H\trianglelefteq G$.
- ☐ לא נכונה כאשר $H\trianglelefteq G$, אבל נכונה אם $H\trianglelefteq G$ ו-H מסדר ראשוני!
- ☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G, T \neq 1$ ציקלית.
אזי $Z(G) \neq 1$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. יהיו G_1, G_2 חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח כי $N_1 \simeq N_2$ וגם $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$. אזי $G_1 \simeq G_2$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G_1, G_2 הן חבורות אבליות
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$: G/N, G/H הן חבורות אבליות: אזי G היא חבורה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|, |N|) = 1$
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G| = p^n$, כאשר p ראשוני, $2 \leq n$, אזי:
א) יתכן כי $|G'| = p^{n-1}$ (G' - חבורת הקומוטטורים של G).
ב) לא יתכן $|G'| = p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'| = p^{n-2}$.
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית ונניח כי $G/Z(G)$ הוא חבורה אבלית. אזי G היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

---

2. תהי S_n החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$ ונניח כי H מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \geq 5$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G=AB$, כאשר A ו B הן ת"ח אבליות של G. אזי G היא אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ותהי P ת"ח p-סילו של G. אזי P/N היא ת"ח p-סילו של G/N

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N \leq P$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$

כאשר G' היא תת חבורת הקומוטטור של G. אזי H אבלית

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית A_n יש תמיד תת"ח מאינדקס n

$\boxed{\text{שים לב: } A_1 = 1}$

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \geq 3$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של S_4 הוא:

א) 4   ב) 5   ג) 6

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$

ונניח כי $C_G(a) \cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$ ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב',
15.7.90

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נ'

ב) הגדר: ת"ח K ו- H של חבורה G צמודות זו לזו. (2 נ'

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ת"ח p-סילו צמודות זו לזו. (20 נ'

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n\geq 3$, $A_n = \langle (12k) \mid k=3,4,\dots,n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n\geq 3$ ו- H מכילה מחזור τ מאורך 3 אזי $H = A_n$.

שאלה 3.

הוכח כי חבורה מסדר $p50$, p ראשוני, אינה חבורה פשוטה

שאלה 4.

הוכח כי למשוואה $x^2ax=a^{-1}$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם a הוא חזקה שלישית של איבר ב- G.

בהצלחה!

מועד ב', סמסטר ב', תש"ן

17.9.90

מס. תלמיד

אלגברה ג' 1

פרופ' מ. הרצוג

חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר.

שים לב: ענו על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נק').

ב) נסח את משפט קושי לחבורות אבליות. (2 נק').

ג) הוכח: אם p ראשוני ואם G חבורה סופית, אזי G מכילה לפחות חבורת p-סילו אחת. (20 נק')

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n\ge 3$, $A_n=\langle (12k)\mid k=3,4,\dots,n\rangle$. (10 נק')

ב) הוכח: אם $H\trianglelefteq A_n$, $n\ge 3$ ו-H מכילה מעגל מאורך 3, אזי $H=A_n$. (15 נק')

שאלה 3.

הוכח שכל חבורה מסדר 255 הוא אבלית.

[רמז: $|G|=255=17\cdot 5\cdot 3$. תהיינה $H,K,L\le G$ מסדרים 17,5,3 בהתאמה. הוכח: $H\triangleleft G$ והסק $G'<H$. הוכח גם ש-$K\triangleleft G$ או $L\triangleleft G$ והסק: $G'=1$]

שאלה 4.

הוכח שלמשוואה $xax=b$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם ab הוא ריבוע של איבר של G.

1. תהי G חבורה ותהיינה $K,H \le G$ המקיימות:
$K \le H$. אזי:

א) $N_G(K) \le N_G(H)$ ב) $N_G(H) \le N_G(K)$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

2. תהי S קבוצה חלקית של החבורה G. אזי:

$$C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$$

א) נכון תמיד; ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם S חבורה חלקית.

ג) טענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית ותהי $1 \lneq N \trianglelefteq G$.

אזי: $N \cap Z(G) \gneq 1$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, p רא'

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

4. יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם על).
אזי:

א) ל-G ישנה חבורת מנה איזומורפית ל-H;

ב) ל-G ישנה ת"ח איזומורפית ל-H;

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ ותהי P ת"ח p-סילו של G. אזי $P \cap H$ הינה ת"ח p-סילו של H.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $H \trianglelefteq G$

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

2. יהיו נתונים התמורות: $\alpha=(15)(473)(26)$, $\beta=(16)(267)(34)$ ו-$\gamma=(17)(5362)$ ב-S_7. אזי:

א) α צמודה ל-β ב-S_7; ב) β צמודה ל-γ ב-S_7.

ג) α צמודה ל-γ ב-S_7.

---

3. תהי G חבורה סופית פשוטה ותהי $H \leq G$ בעלת האינדקס: $|G:H|=5$. אזי: $G \cong A_5$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד; נכון רק אם $|H|=12$

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

4. תהי $H \leq G$ ונניח כי $g^2 \in H$ לכל G.

אזי:

א) G/H הינה אבלית ב) G/H איננה תמיד אבלית, אבל G/H אבלית

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית, $H \le G$ ונניח כי $H\cap G'=1$,
כאשר G' היא חבורת הקומוטטור של G. אזי H אבלית.

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה סופית ונניח כי $G \simeq \mathrm{Inn}\,G$. אזי G אבלית.

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G מסדר p^n, p ראשוני.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות..

---

3. תהי G חבורה סופית ותהי $G=FK$ כאשר $K\le G$
ו $F \trianglelefteq G$. אזי: $F\cap K \trianglelefteq G$.

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר F אבלית.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. מספר האיברים הצמודים של $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$, מחזור
מאורך n ב-S_n, הוא:

א) 3^n ב) $n!$ ג) $(n-1)!$

1. תהי T חבורה ציקלית מסדר $2^n 3^m$

אזי מספר החבורות החלקיות של T הוא:

א) $6nm$ ב) nm ג) $(n+1)(m+1)$

---

2. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$ ו- G/N , G/H

הן חבורות ציקליות. אזי G היא חבורה ציקלית

א) נכון תמיד;

ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|G/N| , |G/H|)=1$

ג) א' ו- ב' אינם נכונים.

---

3. תהי G חבורה מסדר p^n , p ראשוני ונניח

כי $|G/Z(G)|=p^2$. אזי G/G' אינה ציקלי

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \le 4$;

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

4. תהי S קבוצה חלקית של החבורה G. אזי

א) $C_G(C_G(S)) \le S$ ב) $C_G(C_G(S)) \ge S$;

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', תש"ן
15.7.90

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק א'.

משך חלק א': 60 דקות.

אין להשתמש בכל חומר עזר.

מספר השאלות: 16.

לכל שאלה יש תשובה נכונה אחת ויחידה.

סמן עיגול סביב האות א', ב' או ג' המתאימה לתשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה: 3.25 נק'

אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'

תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$ ובעלות ח"ת. פולן אחת לפחות ציקלית הוא:

א) 5 ב) 6 ג) 7

---

2. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^n$, כאשר p ראשוני ו- $n\geq 1$. תהי C מחלקת צמידות (לא איברים) של G. אזי $|C|<p^{n-1}$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n>1$
ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

3. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^r m$, כאשר p ראשוני, $(p,m)=1$. נניח כי $p \mid |Z(G)|$ ותהי C מחלקת צמידות (לא איברים) ב-G. אזי $p^r \nmid |C|$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם ח"ת p-סילו של G היא אבלית
ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית ותהי $H\leq G$. אם $a\in G$ ואם $a^2\in H$, אזי G היא בעלת סדר זוגי.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, p ראשוני
ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G$, $T \neq 1$ ציקלית.
אזי $Z(G) \neq 1$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה G_1, G_2 חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח כי $N_1 \cong N_2$ וגם $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. אזי $G_1 \cong G_2$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G_1, G_2 הן חבורות אבליות
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$ ו- G/N, G/H הן חבורות אבליות. אזי G הוא חבורה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|N|)=1$
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G|=p^n$, כאשר p ראשוני ו $2 \leq n$, אזי:

א) יתכן כי $|G'|=p^{n-1}$ (G' - חבורת הקומוטטורים של G).
ב) לא יתכן $|G'|=p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'|=p^{n-2}$.
ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות

1. יהי G חבורה סופית. נניח כי $G/Z(G)$ הוא חבורה אבלית. אזי G היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית

ג) הטענות א׳ ו ב׳ אינן נכונות

---

2. יהי S_n החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$. נניח כי H מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n\geq 5$

ג) הטענות א׳ ו ב׳ אינן נכונות.

---

3. יהי $G=AB$, כאשר A ו B הן ת"ח אבליות של G. אזי G הוא אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$

ג) הטענות א׳ ו ב׳ אינן נכונות

---

4. יהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ויהי P ת"ח p-סילו של G. אזי P/N היא ת"ח p-סילו של G/N

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N\leq P$

ג) הטענות א׳ ו ב׳ אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית, $H \le G$ ונניח כי $H\cap G'=1$
כאשר G' הוא חבורת הקומוטטור של G. אזי H אבלית

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית A_n ישנה תמיד תת"ח מאינדקס n

$\boxed{\text{שים לב: } A_1 = 1}$

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \geq 3$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של S_4 הוא:

א) 4   ב) 5   ג) 6

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$
ונניח כי $C_G(a)\cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$ ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', ת
15.7.90

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נ'

ב) הגדר: ת"ח K ו-H של חבורה G צמודות זו לזו. (2 נ'

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ת"ח p-סילו צמודות זו לזו - (20

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n \geq 3$, $A_n = \langle (12k) \mid k = 3, 4, \ldots, n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n \geq 3$, ו-H מכילה מחזור τ מאורך 3)
אזי $H = A_n$.

שאלה 3.

הוכח כי חבורה מסדר $15p$, p ראשוני, אינה חבורה פשוטה

שאלה 4.

הוכח כי למשוואה $x^2ax = a^{-1}$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם a הוא חזקה שלישית של איבר ב-G.

בהצלחה!

דט.ו.ד

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק א'

חלק א': 60 דקות.

להשתמש בכל חומר עזר.

השאלות: 16.

שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.

עגול סביב האות א', ב' או ג' המתאימה

ה הנכונה.

ק' 3

תשובה נכונה: 3.25 נק'

אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'

תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. תהי G חבורה בעלת המרכז $Z(G)$ ותהי $H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $Z(G/H) \leq Z(G)/H$ (המרכז של G/H)

ב) $Z(G/H) \leq Z(G)H/H$

ג) $Z(G/H) \geq Z(G)H/H$

---

2. יהיו נתונים האיברים: $\alpha=(15)(473)(26)$, $\beta=(16)(267)(34)$

ו $\gamma=(17)(5362)$ ב- S_7. אזי:

א) α צמוד ל- β ב- S_7.

ב) β צמוד ל- γ ב S_7.

ג) α צמוד ל γ ב S_7.

---

3. תהי G' חבורת הקומוטטור של G. אזי:

א) $Z(G/G') \lneq G/G'$ (המרכז של G/G')

ב) $Z(G/G') = G/G'$

ג) $Z(G/G') \gneq G/G'$

---

4. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^3\cdot 3^2\cdot 7^3$

ובעלות חבורת 2-סילו ציקלית הוא:

א) 18

ב) 6

ג) 9

1. יהיו נתונים האיברים $\alpha=(12)(437)(56)$, $\beta=(74)(125)(36)$ ו- $\gamma=(13264)(57)$ ב- S_7 . אזי:

א) γ מצמידה את α ל- β : $\alpha^\gamma=\beta$.

ב) γ מצמידה את β ל- α : $\beta^\gamma=\alpha$.

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה ותהיינה $K,H\le G$ המקיימות: $K\le H$
אזי:

א) $N_G(K)\le N_G(H)$

ב) $N_G(H)\le N_G(K)$

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

3. מספר האיברים המצמידים של $(1\,2\,3\ldots n)$ ב- S_n הוא:

א) $(n-1)!$

ב) $(n-2)!$

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

4. תהי G חבורה סופית ותהי $H\le G$ בעלת האינדקס $|G:H|=n$. אזי:

א) $|G|$ מחלק את $n!$.

ב) $n!$ מחלק את $|G|$.

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $P\in Syl_p(G)$.
נניח כי $N_G(P)\trianglelefteq G$. אזי:

א) $N_G(P)=G$

ב) $|G:N_G(P)|=1+p$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. תהי $G=A_1\times A_2\times\dots\times A_r$ מכפלה ישרה של $r>1$,
חבורות ציקליות מסדר ראשוני p. תהי $H\le G$
בעלת הסדר p. אזי:

א) $H=A_i$ עבור i מתאים.

ב) $H\le A_i\times A_j$ עבור i,j שונים מתאימים.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית ויהי T אוטומורפיזם של G
ללא נקודות שבת. נניח כי $o(T)=2$. אזי:

א) $T(x)=x^2$ לכל $x\in G$.

ב) $T(x)=x^{-1}$ לכל $x\in G$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. אם לחבורה הסימטרית S_n יש בדיוק 4
ת"ח נורמליות ואזי:

א) $n=3$

ב) $n=4$

ג) $n=5$

1. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות סופיות. אזי:

א) $G = (Imf)(kerf)$.

ב) $|G| = |Imf|\,|kerf|$.

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי $G/N\cap M$ הוא אבלי. אזי:

א) G/N, G/M הן חבורות אבליות.

ב) G/N ו G/M הן חבורות אבליות רק אם $N \neq M$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

3. מספר האיברים מסדר 2 בחבורת הקווטרניונים Q מסדר 8 הוא:

א) 3

ב) 5

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

4. תהי G חבורה סופית ותהיינה $H \le G$ ו $P \in Syl_p(G)$. נניח כי $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $P \trianglelefteq G$.

ב) $P \trianglelefteq G$ רק אם $H \operatorname{char} G$.

ג) $P \trianglelefteq G$ רק אם H אבלית.

מועד א', סמסטר ב', תשמ"ט
4.7.89

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ב'

משך חלק ב': 2 שעות

אין להשתמש בכל חומר עזר.

...ים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

שאלה 1.

...את משפט קושי לחבורות אבליות: אם G חבורה אבלית ...ם p ראשוני המחלק את $|G|$, אזי קיים לפחות איבר אחד a ב-G בעל הסדר p: $o(a) = p$.

...ערה: אין להשתמש במשפט המיון של חבורות אבליות סופיות)

שאלה 2.

...' G חבורה ותהי H ת"ח של G בעלת האינדקס הסופי: $|G:H| = n$.
...: קיימת $K \trianglelefteq G$ כך ש: G/K איזומורפית לת"ח של S_n (החבורה הסימטרית).

שאלה 3.

...ח כי אין חבורה פשוטה בעלת הסדר $77p$, כאשר p מספר ...וני.

שאלה 4.

...) ...יי' את G' את החבורה הקומוטטור של G. הוכח:
...לו כן) לכל קוסט $G'x$, $x \in G$, הנו איחוד של מחלקות ...מידות של איברי G.
...) G חבורה סופית לא אבלית, אזי $k(G) =$ מספר מחלקות ...מידות של איברי G, מקיים את אי-שוויון:

$$k(G) \geq |G:G'| + 1$$

בהצלחה!

מועד ב', סמסטר ג', תש"ן
24.9.89

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ג'

משך חלק ג': 2 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר.

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 4

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית.

ב) הוכח: כל חבורה סופית G מכילה, לפחות חבורת p-סילו אחת לכל מספר ראשוני p.

(הערה: עליך לנסח את משפטי העזר בהם הנך משתמש ואפשר רק לקרוא להם בשם המתאים)

שאלה 2.

תהי G חבורה ותהי $N \trianglelefteq G$. הוכח:

$$\{\text{כל הת"ח של } G/N\} = \{H/N \mid N \le H \le G\}.$$

שאלה 3.

תהי G חבורה סופית מסדר $|G| = p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$, p_i ראשוניים שונים ותהיינה K, H ת"ח של G. הוכח:

א) (10 נק') אם לכל $i=1,\dots,k$ מתקיים: או $p_i^{r_i} \mid |H|$ או $p_i^{r_i} \mid |K|$, אזי $G=HK$.

ב) (15 נק') אם $(|G:H|,|G:K|)=1$ (כלומר האינדקסים זרים זה לזה) אזי $G=HK$.

שאלה 4.

תהי G חבורה מסדר $231 = 3\cdot 7\cdot 11$ ותהיינה $A \in Syl_{11}(G)$, $\in Syl_7(G)$ ו-$C \in Syl_3(G)$. הוכח:

א) (5 נק') $A \triangleleft G$.

ב) (10 נק') AB, AC הן ת"ח אבליות של G.

ג) (10 נק') A מוכלת במרכז $Z(G)$ של G.

בהצלחה!

1. תהי G חבורה סופית מסדר n ותהי $\trianglelefteq G$ ציקלית מסדר m. אז:

א) ל-G יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את m

ב) ל-G יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את $\frac{n}{m}$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

2. מספר החבורות האבליות מסדר $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ ובעלות ת"ח ציקלית מאינדקס ראשוני הוא:

א) 3.

ב) 4.

ג) 6.

---

3. מספר האיברים הצמודים של (12) ב-S_n הוא:

א) 2^n.

ב) $n(n-1)$.

ג) $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

4. תהי G חבורה מסדר $|G| = pm$, $(p,m)=1$

ותהי $P \in Syl_p(G)$. נניח כי $P \ntrianglelefteq G$ ו- $m \equiv 1 \pmod p$.

אז:

א) $N_G(P) = P$.

ב) $N_G(P) \supsetneq P$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

1. יהי T ת"ח ציקלית נורמלית של החב' הסופית הלא-אבלית G. אזי:

א) $C_G(T) = T$.

ב) $C_G(T) \supsetneq T$.

ג) $C_G(T) \subseteq T$ ולא תמיד $C_G(T) = T$;

---

2. מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורת הקווטרניונים Q מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

3. יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם

אזי:

א) ל-G ישנה חבורת מנה האיזומורפית ל-H

ב) ל-G ישנה ת"ח האיזומורפית ל-H;

ג) התשובות א' וב' אינן נכונות.

---

4. תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי G/N ו-G/M הן חבורות סופיות. אזי:

א) G היא סופית.

ב) אם $M \cap N$ היא סופית, אז G היא סופית

1. תהי $G' \le A \le G$ ותהי $H \le G$. אזי:

א) $HA = G$.

ב) $HA \le G$ ויתכן $HA < G$. ($\le$ פירושו ת"ח)

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה סופית ותהי $P \in Syl_p(G)$. אזי:

א) $N_G(N_G(P)) = G$.

ב) $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

3. תהיינה H ו K ת"ח של G ונניח כי $K \le H$. אזי:

א) $Z(K) \le Z(H)$.

ב) $C_G(K) \le C_G(H)$.

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

4. לחבורה הסימטרית S_n:

א) יש ת"ח מכל אינדקס מהצורה:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r) \quad , \quad 0 \le r \le n-1$$

ב) יש ת"ח מכל אינדקס המחלק את $n!$.

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

1. תהי $N \trianglelefteq G$ ונניח כי N היא לא-אבלית.
אזי:

א) קיימת K, המקיימת $1<K<N$: $K \triangleleft G$.

ב) אם $N \neq N'$ אזי קיימת K, המקיימת $1<K<N$: $K \triangleleft G$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות:

---

2. מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורה הדיהדרלית D_8 מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

3. תהיינה A, B ת"ח אבליות של G ונניח כי $G=AB$. אזי:

א) G היא אבלית.

ב) אם $A \cap B \neq 1$, אזי G הינה אבלית.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

4. תהי $R \trianglelefteq G$ ותהי $R \leq K \leq G$. אזי:

א) $N_{G/R}(K/R) \leq N_G(K)/R$

ב) $N_{G/R}(K/R) \leq \dfrac{N_G(K)R}{R}$

ג) $N_{G/R}(K/R) \geq \dfrac{N_G(K)R}{R}$