מועד א' סמסטר ב'

א' תמוז תשס"ג

01.07.2003

מבחן באלגברה ב-1

המרצה: אופל שרון

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

ענה על **4** מתוך **6** השאלות הבאות.

1. (25 נק') הוכח את המשפט השלישי של סילו:

תהי G חבורה סופית, $p \mid |G|$ ראשוני, $P<G$ חבורת p-סילו של G. נסמן מס' חבורות p-סילו של G $=n_p$.

הוכח: (12 נק') א) $n_p=[G:N(P)]$

(13 נק') ב) $n_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$

2. (13 נק') א) מצא מחלקים אלמנטריים וגורמים אינווריאנטים של החבורה

$$G=\mathbb{Z}_{100}\oplus\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_{35}$$

(12 נק') ב) מהו מספר האיברים מסדר 2 ו-4 ב G.

3. (25 נק') הוכח שאם G חבורה מסדר p^l ($l\geq 1$, p ראשוני) ו- $\{e\}\neq H\triangleleft G$, אז $\{e\}\neq H\cap Z(G)$.

4. (25 נק') תהי G חבורה קומוטטיבית, $H<G$.

(13 נק') א) הוכח שאם $G/H \approx \mathbb{Z}^l$ אז $G \simeq H \oplus \mathbb{Z}^l$

(כש $\mathbb{Z}^l := \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{l \text{ פעמים}}$)

(12 נק') ב) הוכח שאם $H<L<G$ ו $G/L \approx \mathbb{Z}^n$, $L/H \approx \mathbb{Z}^m$, $H \simeq \mathbb{Z}^k$

אז $G \simeq \mathbb{Z}^{k+m+n}$

5) (25 נק')

תהי $\gamma = (12)(34)(56\ldots n) \in S_n$ ו $(n>6)$.

הוכח ש $C(\gamma) \approx D_4 \times C_{n-4}$

6) (25 נק')

תהי G חבורה, $|G| = pqr$ ($p<q<r$ ראשוניים).

(9 נק') א) הוכח שיש $H \lhd G$ כך ש $|H| = qr$

(8 נק') ב) הוכח ש G פתירה

(8 נק') ג) הוכח שכל תבורת r-סילוב של G היא נורמלית

(הדרכה: הסתכל ב $N(R)$ כש R תבורת r-סילוב)

בהצלחה!

אלגברה ב'-1, מועד א' (7.7.98)

מורים: רופא, וסרמן.

משך המבחן: 3 שעות. אין להשתמש בחומר עזר.

ענה על 4 שאלות בלבד.

1. א. נניח a,b איברים מתחלפים מסדר סופי בחבורה G. הוכח ש- ab מסדר סופי ושאם הסדרים באלה זרים הסדר של ab הוא מכפלתם.

ב. הוכח שאם m,n מספרים טבעיים זרים אז המכפלה של חבורה ציקלית מסדר n עם חבורה ציקלית מסדר m היא ציקלית.

2. א. אם A חבורה אבלית מסדר n ו- m מחלק את n אז יש ל- A חבורה חלקית מסדר m וחבורה חלקית מאינדקס m.

ב. תן דוגמא של חבורה סופית שיש מספר m שמחלק את הסדר שלה ואין לה חבורה חלקית מסדר m.

3. אם a איבר בחבורה G המרכז שלו ב- G, $C_G(a)$, הוא קבוצת איברי G שמתחלפים עם a.

א. אם G סופית הראה שמספר הצמודים של a שווה לאינדקס $(G:C_G(a))$.

ב. מה המרכז של (12345) ב- S_5 ? ב- A_5 ?

ג. הראה שהתמורות (12345) ו- (12354) צמודות ב- S_5 אך לא צמודות ב- A_5.

4. נסמן ב- $SL_2(\mathbb{F}_5)$ את חבורת המטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל השדה $\mathbb{F}_5$.
מצא חבורות 2-סילו של $SL_2(\mathbb{F}_5)$, הראה שאינה אבלית ויש לה רק איבר אחד מסדר 2.
הראה גם שחבורות 2-סילו בה אינן דיהדרליות.

5. א. מה מספר החבורות האבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר 10000 ?

ב. מה מספר החבורות החלקיות מסדר 10 בחבורה $\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)$?

המשך ↙

6. יהי F שדה ונסמן F^+ את החבורה האדיטיבית של F (כלומר F עם פעולת החיבור בלבד.) תהי G חבורת המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $a,b,c \in F$, ביחס לפעולת כפל מטריצות.

א. הוכח שהמטריצות שבהן $b=0$ מהוות חבורה חלקית נורמלית, H, של G.

ב. הראה ש-H איזומורפית ל- $F^+ \times F^+$.

ג. מצא חבורה חלקית K כך ש- $H \cap K = \{1\}$ ו- $HK = G$.

בהצלחה

אלגברה ב׳-1, מועד ב׳ (7.9.97)

המורה: ל. רובט

משך המבחן: 3 שעות

ענה על <u>4 שאלות</u> (ותו לא)

אין להשתמש בחומר עזר.

1. תהי D_n החבורה הדיהדרלית מסדר $2n$ (חבורת הסימטריות הספציות של המצולע המשוכלל עם n קדקודים), עבור $n \leq 3$. מהו המרכז של D_n? מהי המנה של D_n מודולו המרכז?

2. ידוע שחבורה מסדר 8 איזומורפית לאחת מ-5 אפשרויות: דיהדרלית, קווטרניונים או אבלית. הראה שקבוצת המטריצות $\left\{ \pm I, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא <u>חבורה</u> ביחס לכפל מטריצות וקבע למי מ-5 האפשרויות היא איזומורפית.

3. אם G היא חבורת-p סופית הוכח: (א) יש ל-G מרכז לא טריוויאלי, (ב) אם G לא קומוטטיבית אז שהאינדקס של מרכזה לפחות p^2.

4. נניח G חבורה סופית, H חבורה חלקית <u>נורמלית</u> ב-G ו-K חבורה חלקית <u>שהסדר</u> שלה <u>זר</u> לאינדקס של H ב-G. הוכח ש-K מוכלת ב-H.

5. הוכח שבחבורה סופית G שתי חבורות p-סילו הן צמודות (אין צורך להוכיח קיום), ושמספרן $\equiv 1$ מודולו p.

6. תהי A החבורה <u>הכפלית</u> של המספרים הרציונליים שאינם אפס ו-B החבורה הכפלית של המספרים הרציונליים <u>החיוביים</u>. הוכח (א) A איזומורפית ל-$B \times \mathbb{Z}/(2)$, (ב) A <u>לא</u> איזומורפית ל-B.

<u>בהצלחה</u>

סמסטר קיץ
מועד א
תשנ"ח
1997/98

מבחן ב"אלגברה 1"

דר אלכסס גלוזיאק.

חומר סגור

- משך הבחינה 2½ שעות
- צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

פתור 4 מתוך 6 השאלות

1. G חבורה, H תת-חבורה חלקית. הוכח את המשפט: קבוצת הקוסטים (ימניים) של H ב-G עם פעולת כפל קבוצות היא חבורה אם ורק אם H נורמלית.

2. G חבורה, $H<G$, $A=\{H, Ha, \ldots\}$ קב' הקוסטים ימניים.
לכל $g \in G$ מתאימה פונקציה f_g

$$f_g : A \longrightarrow A \qquad (Ha)f_g = Hag$$

א. הוכח כי התאמה זו מגדירה פעולה של G על A.
ב. נתון ש-G אינסופית, $[G:H]$ סופי.
הוכח כי קיים $K<H$, כך ש-$K \lhd G$.

3. מצא את כל התמורות ב-S_n המתחלפות עם
$$\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,\ldots n)$$

4. G חבורת הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מהצורה $ax+b$

H המחלקה החלקית של הפונקציות $x+c$.

א. הראה כי $H \triangleleft G$

ב. האם $G/H \times H$ (מכפלה ישרה) איזומורפית ל G? אם כן, הצג את האיזומורפיזם. אם לא, נמק היטב למה לא.

5. G חבורה לא אבלית מסדר 8.

א. הראה כי קיימת $H=\langle a \rangle$, ציקלית מסדר 4, $H \triangleleft G$

ב. הראה כי אם $b \in G$, $b \notin H$ אז $b^2 \in H$

ג. הראה כי קיימות רק 2 חבורות לא אבליות מסדר 8.

6. א. הוכח: G מסדר p^α. המרכז של G שונה מ $\{e\}$.

ב. הוכח: חבורה מסדר p^2 אבלית.

בהצלחה!

מבחן ~~באלגברה~~ ב'-1, סמסטר קיץ מועד ב'.
מורים: רוסט, זסרמן (6.~~9.98~~).

ענה על 4 שאלות.
משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בחומר עזר.

1. רשום חבורת 2 סילו של S_4 וחבורת 3 סילו של S_6. בכל מקרה הוכח שקיבלת חבורה.

2. הוכח שמכפלה של שתי חבורות ציקליות (לא טריויאליות) היא ציקלית אם ורק אם שתיהן סופיות והסדרים שלהן זרים.

3. תהי G חבורת כל הפונקציות הלינאריות $ax+b$, $a\neq 0$, מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$, ביחס לפעולת <u>ההרכבה</u>. הראה ש-G מכפלה $\frac{1}{2}$ ישרה של החבורה <u>הכפלית</u> $\mathbb{R}^{\times}$ ($=\mathbb{R}-\{0\}$ עם כפל) והחבורה החיבורית $\mathbb{R}^{+}$ ($=\mathbb{R}$ עם פעולת החיבור).

4. נניח p,q מספרים ראשוניים שונים. (א) כמה חבורות אבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר p^2q^3 יש? (ב) בכל אחת מהן מה מספר החבורות החלקיות מסדר pq?

5. הוכח שקיימת חבורה <u>לא</u> קומוטטיבית מסדר 8 שאינה איזומורפית לחבורה הדיהדרלית מסדר 8.

6. תהי $SL_2(\mathbb{F}_p)$ חבורת המטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל $\mathbb{F}_p$ (ביחס לכפל מטריצות). מה סדר החבורה? לכל <u>ראשוני</u> שמחלק את הסדר מצא חבורת סילו מתאימה.

בהצלחה

22 בספטמבר 1993

מבחן באלגברה ב׳ 1

המרצה: אילן זיסר
משך הבחינה: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר
ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

1. בשאלה הזו $n \geq 5$ הינו מספר טבעי ו- S_n הינה החבורה הסימטרית ממעלה n.
א. (10 נקודות) מצא את כל החבורות החלקיות הנורמליות של S_n.
ב. (15) הוכח שאם $2 < k < n$ אז אין ל S_n חבורה חלקית מאנדקס k.

2. (25) הוכח שכל חבורה מסדר p^3q אינה פשוטה כאשר p ו- q הינם מספרים ראשוניים.

3. אידאל M בחוג R נקרא **אידאל מקסימלי** אם $M \neq R$ ואם M לא מוכל בשום אידאל של R פרט ל- R עצמו.
א. (10) נסמן ב- R את חוג הפולינומים עם מקדמים מרוכבים ונסמן ב- M את קבוצת כל הפולינומים המתאפסים בנקודה 0. הוכח: M היא אידאל מקסימלי של R.
ב. (15) הוכח שאידאל I של חוג קומוטטיבי R הינו מקסימלי אם ורק אם חוג המנה R/I הינו שדה.

4. א. (10) הוכח שאם H הינה חבורה חלקית נורמלית של G ו- P היא חבורת סילו נורמלית של H אז P הינה חבורה חלקית נורמלית של G.
ב. (15) הוכח שאם G הינה חבורה סופית ולכל חבורה חלקית לא טריויאלית H של G מתקיים $N_G(H) > H$ אז כל חבורת סילו של G היא נורמלית.

5. א.(12) הוכח שלחבורת - p סופית קיימות חבורות חלקיות נורמליות מכל סדר המחלק את סדר החבורה.
ב.(13) הוכח שאם G הינה חבורת - p לא ציקלית אז $[G:G'] \geq p^2$ כאשר G' היא חבורת הקומוטטור של G.

בהצלחה

כא באלול, תשנג

7 בספטמבר, 993

בחינה באלגברה ב1 - מועד ב

המורה: משה ירדן

משך הבחינה: 3 שעות

ענה על 4 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. נסמן ב $K^\times$ את החבורה הכפלית של שדה K. הוכח שאם G היא תת חבורה סופית של $K^\times$ אזי G מעגלית.

2. הוכח שכל חבורה מסדר 65 היא מעגלית. רמז: השתמש במשפטי סילו.

3. תהי A חבורה אבלית סופית ויהי p מספר ראשוני. נסמן $A_p=\{a\in A|\ pa=0\}$. השתמש בהעתקה $pa \longmapsfrom a$ כדי להוכיח ש $|A_p|=|A/pA|$. הסק מכאן ש

$$\dim_{\mathbb{F}_p} A_p=\dim_{\mathbb{F}_p} A/pA$$

4. א. הוכח שכל חבורה מסדר 24 פתירה.
   ב. תן דוגמה לסדרה נורמלית של S_4 שכל גורמיה חלופיים.

5. יהי $f\in K[X]$ פולינום אי פריק ממעלה n. בנה הרחבה L של K ממעלה n שבה יש ל f שרש.

6. תהי B תת חבורה של החבורה $A=Z/125Z\oplus Z/25Z\oplus Z/25Z$. הוכח באפן ישיר (כלומ בלי להסתמך על משפט החבורה החלקית) ש $B\cong\bigoplus_{i=1}^{3} Z/5^{l_i}Z$ באשר $l_1\le 3$ ו $l_2, l_3\le 2$.

מבחן באלגברה ב'-1 סמסטר קיץ תשנ"ב.
מועד א' (המורה: ל. ריפס)

אין להשתמש בחומר עזר.
משך המבחן 3 שעות
ענה על 4 שאלות

בהצלחה

1. הגדר מכפלה $\frac{1}{2}$ ישרה של חבורות והוכח: (א) החבורה הדיהדרלית מסדר 8 היא מכפלה כזו (באופן לא טריוויאלי). (ב) החבורה של הקווטרניונים, Q_8, אינה כזאת.

2. הגדר את הזוגיות של תמורה והוכח שהיא מגדירה הומומורפיזם מחבורת התמורות S_n ל- $\{\pm 1\}$.

3. נניח A חבורה אבלית סופית ו-B חבורה חלקית שלה שהיא ציקלית ונוצרת ע"י איבר מסדר מירבי ב-A. (א) הוכח שלכל איבר ב-A/B יש נציג ב-A עם אותו סדר. (ב) הראה בדוגמא שאם משמיטים את הנחת הסדר המירבי המסקנה בחלק (א) לא מתקיימת. (כלומר: מצא A ות"ח B, ציקלית, כך של-A/B יש איבר x שכל נציג שלו מסדר שונה מהסדר של x).

4. נניח H חבורה חלקית מאינדקס 2 בחבורה סופית G. (א) הראה שלכל איבר של H מספר צמודיו ב-G הוא שווה למספר צמודיו ב-H או כפול ממנו. (ב) תן דוגמא לכל אחת מהאפשרויות.

5. בחבורה חופשית מדרגה 5, $\mathbb{Z}^5$, תהי A החבורה החלקית הנוצרת ע"י האיברים $(2,0,18,48,2)$, $(7,6,-9,-36,-11)$, $(2,6,18,42,2)$, $(-7,0,9,30,11)$. (א) מה הדרגה של A? (ב) מה המנה $\mathbb{Z}^5/A$? (כלומר רשום אותה כסכום ישר של חבורות ציקליות.)

6. תהי P חבורת p-סילו בחבורה G ו-$N(P)=\{x\in G : xPx^{-1}=P\}$. (א) הוכח ש-P היא חבורת p-סילו יחידה ב-$N(P)$. (ב) הוכח $N(N(P))=N(P)$. (ג) תן דוגמא לחבורה G וחבורת סילו P כך ש-$N(P)=P$ ודוגמא שבה $N(P)\neq P$.

מועד ב, סמ' ב' - תשנ"א

3.9.91

אוניברסיטת ת"א

מדעים מדויקים

בחינה באלגברה ב' 1

פרופ' א. קליין

ענה על 5 שאלות.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר וכן לא במחשבונים.

בכל מקום האות G מסמנת חבורה.

1. תהי $G \triangleright K$ ו- $[G:K]$ סופי. הוכח:

(א) אם $a \in G$ מסדר סופי, אזי הסדר של a הוא כפולה של הסדר של aK ב- G/K.

(ב) אם H חבורת - p חלקית ל- G, p ראשוני שאינו מחלק את $[G:K]$, אזי $H<K$.

2. תאר בניה של שדה בעל 27 איברים ומצא בו איבר מסדר 26 ביחס לכפל.

3. (א) G סופית, P חבורת p - סילו ב- G. הוכח כי $NN(P)=N(P)$.

(ב) הבא דוגמה לחבורה G ולחבורה חלקית H בה שמקיימים $NN(H)\neq N(H)$

4. יהי $r\le n$. חשב את מספר התמורות ב- S_n המתחלפות עם התמורה $\sigma=(1 2 \cdots r)$ והוכח כי $\alpha\in S_n$ מתחלפת עם σ אם ורק אם $\alpha=\sigma^i\tau$ כאשר $i=0,1,\dots,r-1$ ו- $\tau\in S_n$ משמרת על $1,2,\dots,r$.

5. (א) G סופית ו- p ראשוני קטן ביותר המחלק את $|G|$. הוכח כי אם $G>H$ ו- $[G:H]=p$ אזי $G\triangleright H$.

(ב) $|G|=pqr^2$ כאשר $3\le p<q<r$ ראשוניים. הוכח שאם $r>\frac{1}{2}(pq-1)$ אזי G מכילה חבורת r - סילו נורמלית, והסק כי G מכילה חבורה חלקית מסדר qr^2 שהיא נורמלית.

6. תהינה $H_1,H_2 \lhd G$ וכן $G=H_1H_2$. הוכח: $G/_{H_1\cap H_2} \simeq G/_{H_1}\times G/_{H_2}$.

7. אם G קומוטטיבית מסדר p^r, p ראשוני, ו- $x\in G$ איבר מסדר מקסימלי, $H=\langle x\rangle$, אזי אם yH מסדר p^t ב- G/H קיים $z\in G$ מסדר p^t השייך ל- yH.

בס"ד

כ"ד באלול ת
9.1989
מועד ב'
סמס' א'

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מבחן באלגברה ב I
לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג'
המורה: ד"ר דוד סודרי.

משך המבחן: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך כל השאלות הבאות.

1. א. תהי G חבורה ותהיינה H,K תת חבורות של G. נניח כי $K \lhd G$
הוכח: (i) HK תת חבורה של G. (ii) $K \lhd HK$
(iii) $H\cap K \lhd H$
(iv)
$$HK/K \cong H/H\cap K$$
ב. תהי G חבורה ותהיינה A,B תת חבורות נורמליות פתירות.
הוכח כי AB פתירה.

2. א. תהי G חבורה ציקלית מסדר m. יהי a יוצר של G.
הוכח כי a^l יוצר של G אם ורק אם $(m,l)=1$.
ב. תהי G חבורה ציקלית מסדר m. הוכח כי
$$Aut(G) \cong \mathbb{Z}_m^*$$
ג. תהי G חבורה ציקלית אינסופית. הוכח כי
$$Aut(G) \cong \mathbb{Z}_2$$

3. ענה על שלוש מתוך השאלות (א) - (ד)
א. תהי G חבורה מסדר 39, שאינה ציקלית. הוכח כי G אינה נילפוטנטית.
ב. תן דוגמא לחבורה שהיא פתירה אך אינה נילפוטנטית.
ג. הוכח כי חבורה מסדר 396 אינה פשוטה.
ד. תהי G חבורה סופית פשוטה. יהי F שדה ונניח כי קיים הומומורפיזם לא טריביאלי $\varphi: G \to F^*$. הוכח כי G ציקלית.

הפוך!

4. תהי G חבורה ותהי H תת חבורה מאינדקס סופי. הוכח H מכילה תת חבורה N המקיימת

$$N \triangleleft G \qquad \text{(i)}$$

$$[G:N] < \infty \qquad \text{(ii)}$$

5. תהי G חבורה קומוטטיבית סופית שאינה ציקלית. הוכח שיש מספר ראשוני p כך ש-G מכילה חבורה חלקית איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

6. א. תהי G חבורה ותהי K תת חבורה בת שני איברים הוכח כי $K < Z(G)$.

ב. הוכח כי עבור $n \geq 3$, $Z(S_n)=\{1\}$

ג. יהי $n \geq 5$. תהי K תת חבורה לא טריביאלית של S_n. הוכח כי אם $K \triangleleft S_n$, אז $K = A_n$.

בהצלחה!

מועד א'
סמסטר א' תשמ"ט

אוניברסיטת ת"א
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סקלר

מבחן באלגברה ב I
לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג.
המורה: ד"ר דוד סודרי

משך המבחן: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.

חלק א' ענה על שתיים מהשאלות 1-4.

1. א. תהי G חבורה ציקלית מסדר n. ויהי a יוצר של G. הוכח כי a^l יוצר של G אם"ם $(n,l)=1$.
ב. תהי G חבורה סופית מסדר n. נניח כי לכל מחלק d של n יש ל-G לכל היותר תת חבורה ציקלית אחת מסדר d. הוכח כי G ציקלית.

2. תהיינה G_1, G_2 חבורות ויהי $\varphi: G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. תהי H_1 תת חבורה נורמלית של G_1 אשר מכילה את $\ker\varphi$. הוכח כי $\varphi(H_1)$ נורמלית ב $\varphi(G_1)$ וכי קיים איזומורפיזם $G_1/H_1 \cong \varphi(G_1)/\varphi(H_1)$.

3. תהי G חבורה ו H תת חבורה של G. נגדיר $H_G=\{g\in G \mid x^{-1}gx\in H, \forall x\in G\}$
א. הוכח כי H_G היא תת החבורה הנורמלית (של G) הגדולה ביותר המוכלת ב-H.
ב. נסמן ב-$S(G/H)$ את חבורת הפונקציות ההפיכות על G/H. הוכח כי קיים שיכון $G/H_G \hookrightarrow S(G/H)$.

4. יהי p ראשוני.
א. מצא חבורת p-סילו של S_p
ב. הוכח כי חבורת p-סילו של S_{p^2} איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$.
ג. נניח כי $2<p$. חשב (עד כדי איזומורפיזם) את חבורת p-סילו של p^2

חלק ב' ענה על חמשה מתוך שמונת הסעיפים של שאלה 5.

5. א. יהי F שדה. האם נתן לשכן $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow F^*$? נמק.
ב. תהי G חבורה סופית. הוכח כי מספר האיברים של G שהם מסדר 5 הוא כפולה של 4.
ג. תהי G חבורה מסדר 26. נניח כי G אינה אבלית. הוכח כי $\cong D_{26}$:
ד. מצא את הגורמים האינווריאנטיים ואת המחלקים האלמנטריים של החבורה $\mathbb{Z}_{48}\times\mathbb{Z}_{63}$.

בהצלחה!

ה. תהי G החבורה החלקית של $\mathbb{Q}$ אשר נוצרת ע"י הקבוצה $\{1, \frac{1}{5}\}$.
הוכח כי $G \cong \mathbb{Z}$.

ו. רשום את כל האיברים של $\mathbb{Z}_{30}$ שהם מסדר 30.

ז. ותהי $\varphi : G_1 \to G_2$ אפימורפיזם (של חבורות). נניח כי G_1 פשוטה. הוכח כי φ איזומורפיזם.

ח. הוכח כי חבורה מסדר 132 אינה פשוטה.

<u>חלק ג'</u> ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 6,7.

6. תהי G חבורה.

א. הגדר מהן החבורות $Z(G)$ (המרכז של G), $Inn(G)$ (חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G)

ב. הוכח <u>כי</u> אם $G/Z(G)$ ציקלית אז G אבלית.

ג. הוכח כי $Inn(G) \cong G/Z(G)$.

ד. הוכח כי אם G אינה אבלית אז $Aut(G)$ אינה ציקלית.

7. <u>הגדרה</u>: תהי G חבורה ו $G \gneq H$. נאמר כי H תת חבורה <u>מקסימלית</u> של G אם H אינה מוכלת בחבורה חלקית של G פרט ל G עצמה.

תהי G חבורה נילפוטנטית סופית.

א. הוכח כי תת חבורה מקסימלית של G היא נורמלית.

ב. הוכח כי לכל m המחלק את $|G|$ יש ל G תת חבורה מסדר m.

ג. נניח כי $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ כאשר $p_1, \ldots, p_k$ ראשוניים שונים ו $r_1, \ldots, r_k$ טבעיים. הוכח כי לכל i יש ל-G חבורה חלקית מאינדקס p_i, וכי חבורה זאת נורמלית.

<u>חלק ד'</u> ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 8,9.

8. נגדיר $Q = \left\{ \pm I_2 ,\ \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

א. הראה כי Q חבורה חלקית של $GL(2,\mathbb{C})$.

ב. הראה כי כל חבורה חלקית של Q היא נורמלית.

ג. האם $Q \cong D_8$? נמק.

ד. חשב את $Z(Q)$ והראה כי $Q/Z(Q) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

<u>הפוך</u>!

9. יהי p ראשוני. נגדיר $G = \{(x,a) \mid x \in \mathbb{Z}_p,\ a \in \mathbb{Z}_p^*\}$

עם הכפולה

$$(x,a)\cdot(y,b) = (x+ay,\ ab)$$

א. הראה כי G חבורה. מהו הסדר של G?

ב. מצא חבורת p-סילו של G. כמה חבורות p-סילו יש ל G?

ג. הוכח כי G פתירה.

ד. הוכח כי לכל m המחלק את $|G|$ יש ל-G חבורה חלקית מסדר m.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר ב' תשמ"ז
14.7.87

אלגברה ב' 1
לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג
המורה: ד"ר י. הירשפלד

מס. ת.ז: ____ ____ ____ ____

משך הבחינה: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת היא טיוטה בלבד.
סמן נכונות בעגול או ב- ✓ . **שים לב:** אם יותר מתשובה אחת נכונה - סמן את כולן.
הבנת השאלות היא חלק מהבחינה. במהלך הבחינה ייענו רק שאלות טכניות - לא שאלות הבנה.

סימונים קבועים: — G, H, K חבורות סופיות
p, q מספרים ראשוניים.

שאלה 1

$f: G \to G$, $f(g)=g^{-1}$ איזה מהבאים נכון:

- f הומומורפיזם שאינו איזומורפיזם.
- f איזומורפיזם
- f איזומורפיזם אם G קומוטטיבית.
- f איזומורפיזם רק אם G קומוטטיבית.
- אף אחד מהנ"ל.

שאלה 2

G מסדר pq . סמן את הנכונים:

- אם המרכז אינו טריביאלי הרי G קומוטטיבית ואפילו ציקלית.
- תמיד המרכז לא טריביאלי אבל G לאו דוקא ציקלית.
- S_3 הוא דוגמה לא קומוטטיבית מסדר pq עם מרכז לא טריביאלי.
- אם יש שני אברים שאחד אינו חזקה של האחר המתחלפים בכפל הרי G קומוטטיבית.

2/...

שאלה 3

איזה מהבאים נכון:

א. $Ord(a) = Ord(a^{-1})$

ב. $Ord(ab) = Ord(ba)$

ג. $Ord(a^{-1}ba) = Ord(b)$

ד. $Ord(a) < Ord(a^2)$

ה. $Ord(a) > Ord(a^2)$

שאלה 4

איזה מהבאים הוא פעולה של G על G

א. $T_a(x) = xa$

ב. $T_a(x) = xa^{-1}$

ג. $T_a(x) = a^{-1}xa$

ד. $T_a(x) = x$

שאלה 5

F שדה, חיבור וכפל מוגדרים באופן טבעי על $F \times F$
איזה מהבאים נכון:

א. $F \times F$ שדה.

ב. $F \times F$ הוא חוג שאינו שדה.

ג. $\{(a,a) \mid a \in F\}$ הוא שדה.

ד. $\{(a,a) \mid a \in F\}$ הוא אידיאל.

ה. $\{(a,0) \mid a \in F\}$ הוא שדה.

ו. $\{(a,0) \mid a \in F\}$ הוא אידיאל.

שאלה 6

C חוג הפונקציות הרציפות מ- R ל- R. מגדירים $T(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

איזה מהבאים נכון:

א. T הומומורפיזם של החבורה החיבורית C לתוך עצמה.

ב. T הומומורפיזם של החוג C לתוך עצמו.

ג. T הומומורפיזם של החוג C לחוג אחר.

ד. הגרעין של T הוא הקבוצה הבאה (השלם):

שאלה 7

$f: G \xrightarrow{\text{על}} H$ הומומורפיזם ו- K גרעינו. מה נכון:

א. יש איזומורפיזם h מ- H על חבורה חלקית G_1 של G כך ש- $h\circ f$ היא פונקצית הזהות.

ב. אם יש איזומורפיזם כזה הרי G_1 נורמלית ב- G.

ג. אם יש איזומורפיזם כזה הרי $G_1 \cap K = \{e\}$

ד. אם יש איזומורפיזם כזה הרי G סכום ישר של G_1 ו- K.

שאלה 8

ב- Z_8 תהי $\sigma(x) = x+4$ ו- $\tau(x) = 3\cdot x$

א. רשום כמכפלת ציקלוסים זרים

$\sigma =$

$\tau =$

$\sigma\tau\sigma^{-1} =$

ב. החבורה הנוצרת על ידי σ ו- τ ב- S_8 היא:

1. קומוטטיבית
2. ציקלית
3. נורמלית
4. כל S_8
5. בת 4 אברים. (סמן את הנכונים)

שאלה 9

ב- S_4 יש:

__________ חבורות סילוב 3

__________ חבורות סילוב 2.

ב- A_4 יש

__________ חבורות סילוב 3

__________ חבורות סילוב 2.

שאלה 10

הצג את $U(21)$ כמכפלת ציקליות <u>אי פריקות</u> , <u>חלקיות</u> ל- $U(21)$

$$U(21)=\{\qquad\}\times\{\qquad\}\times\{\qquad\}$$

שאלה 11

תהי G חבורה בת 55 איברים.

א. אם G קומוטטיבית יש בה ________ איברים מסדר 5

ב. אם G לא קומוטטיבית יש בה ________ איברים מסדר 5

שאלה 12

זמן בטבלה איזה חבורות יתכנו במספרים הבאים:

n	רק ציקליות	רק קומוטטיביות (אולי יותר מאחת)	קומוטטיבית אחת (ואולי גם אחרות)	אחרת

בהצלחה!!!!

פקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד ב' סמסטר ב' תשמ"ז
27.9.87

אלגברה ב' 1
לתלמידי מתמטיקה שנים ב'-ג'

מס. ת.ז.: __________

המורה: ד"ר הירשפלד

שך הבחינה 3 שעות.
ין להשתמש בחומר עזר.
נה על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת היא טיוטה בלבד.
ום כמה תשובות נכונות סמן את כולן, גם אם אחת נובעת בבירור מהאחרת.

שאלה 1

G חבורה, $a,b \in G$, $Ord(a)=p$, $Ord(b)=q$.
$p \neq q$, p, q ראשוניים)
סמן איזה נכון —

( ) א. אם $|G|=p\cdot q$ אז $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$
( ) ב. אם $|G|=p\cdot q$ ו G קומוטטיבית אז $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$
( ) ג. אם $|G|=p\cdot q$ אז G קומוטטיבית
( ) ד. אם $|G|=p\cdot q$ ו $ab=ba$ אז G ציקלית.
( ) ה. אם $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$ אז G קומוטטיבית.

שאלה 2

יהי $C=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ חוג הפונקציות מהממשיים לממשיים עם חיבור וכפל רגילים.
סמן את הנכונים:

א. $\{f \mid f(2)=0\}$
ב. $\{f \mid f(x)=0 \quad 0\le x\le 1$ לכל$\}$
ג. קבוצת הפונקציות הקבועות
ד. $\{f\cdot\sin x \mid f\in C\}$
ה. $\{f \mid 0\le x<y\le 1 \rightarrow f(x)\le f(y)\}$
ו. $\{f\sin x+g\cdot\cos x \mid f,g\in C\}$

אידאל*	שדה	אחר

*כולל אידאל לא אמיתי.

. בסעיף ______ של שאלה 2 מצאנו אידאל I עבורו C/I
הוא שדה איזומורפי ל ______

. בסעיף ______ של שאלה 2 מצאנו אידאל I עבורו $C/I=\{0\}$

שאלה 4

סמן מה נכון:

יש הומומורפיזם חד ערכי מהחבורה החיבורית Z_n לחבורה החיבורית Z_k

( ) א. אם ורק אם n מחלק את k

( ) ב. אם ורק אם $n \le k$

( ) ג. אם ורק אם $n = k$

( ) ד. אם ורק אם יש הומומורפיזם מ Z_k על Z_n

שאלה 5

יהי K חוג כלשהו $b \in K$. נסתכל בהעתקה $T(a) = ab$.

איזה מהבאים נכון

( ) א. T הוא הומומורפיזם של החבורה החיבורית R

( ) ב. אם R קומוטטיבי T הוא הומומורפיזם של החוג R

( ) ג. אם R קומוטטיבי T הוא איזומורפיזם של החבורה החיבורית R

( ) ד. אם b הפיך T הוא פרמוטציה של R

שאלה 6

p מספר ראשוני , H ו H_1 חבורות חלקיות ב G ו H חבורת סילוב p . סמן מה נכון

( ) א. אם הן שוות מספר סם H_1 חבורת סילוב p

( ) ב. אם הן שוות מספר הן צמודות.

( ) ג. כל שתי חבורות צמודות הן שוות מספר.

( ) ד. כל שתי חבורות שוות מספר הן צמודות.

שאלה 7

תהי G חבורה שאינ ה קומוטטיבית.

איזה מהתנאים הבאים מבטיח ש G <u>איננה</u> חבורה פשוטה.

( ) א. יש $f: G \to G$ איזומורפים שאינו הזהות.

( ) ב. יש $f: G \to H$ הומומורפיזם ואברים $a,b,c \in G$ עבורם $f(a) = f(b) \neq f(c)$

( ) ג. ל G מרכז לא טריביאלי

( ) ד. ל G חבורה חלקית קומוטטיבית לא טריביאלית

( ) ה. מכילה בדיוק 2 אברים מסדר 3.

שאלה 8

זכור שהחבורת הקומוטטור G' הוא החבורה הנוצרת ע"י כל האיברים מהצורה $aba^{-1}b^{-1}$.

איזה מהבאים הוא נכון

( ) א. $S_n' \subseteq A_n$

( ) ב. אם $5 \leq n$. $S_n' = A_n$

( ) ג. אם $5 \leq n$ $S_n' = A_n'$

( ) ד. $S_3' = A_3$

( ) ה. $A_3' = A_3$

( ) ו. $S_4' = A_4$

( ) ז. $A_4' = A_4$

שאלה 9

א. ב A_6 יש ______ פרמוטציות מסדר 2.

ב. ב A_6 יש ______ פרמוטציות מסדר 5.

ג. ב A_6 יש ______ פרמוטציות מסדר 6.

אלה 10

צג את $U(24)$ כמכפלת חבורות אי פריקות:

$U(24) = \{ \quad \cdot \quad \}$ x..

אלה 11

הי G בת 39 אברים

. אם יש אבר אחד מסדר 39 יש ______ אברים מסדר 39.

אם אין אבר מסדר 39 יש ______ אברים מסדר 3

(. זכור כי היחידה לא נכללת בספירה).

אלה 12

שלם את הטבלה

	255	455	655	855
החבורות במספר זה איזומורפיות				
קומוטטיביות במספר זה איזומורפיות				
אחרת				

בהצלחה !!!!

מועד א' תשמ"ז
סמסטר א' 25.2.87

אוניברסיטת ת"א

אלגברה ב' 1.

מרצה: א. ויקין

הזמן המוקצב: שלוש שעות.
ענה על ארבע שאלות.

1. (א) תהי G חבורה לא קומוטטיבית. הוכח כי $G/Z(G)$ אינה ציקלית.
(ב) תהי G לא קומוטטיבית מסדר 105. מהו $|Z(G)|$? נמק!

2. (א) $E\supset F$ שדות ו- $u\in E$ אלגברי מעל F. הוכח כי הפולינום המינימלי של u מעל F אי פריק ומחלק כל פולינום המתאפס ע"י u.
(ב) E שדה בן p^n איברים המכיל את Z_p. הוכח שקיים פולינום $g(x)$ אי פריק ממעלה n מעל Z_p וכן $g(x)/x^{p^n-1}-1$.

3. (א) P תת-חבורת p-סילו ב- G ו- $N(P)<H<G$. הוכח שאם עבור $x\in G$ מתקיים $x^{-1}Px<H$ אזי קיים $h\in H$ כך ש- $x^{-1}Px=h^{-1}Ph$ והסק ש- $x\in H$.
(ב) הפעל P על $X=\{xH/x\in G\}$ ע"י כפל והסק שמספר איברי X הוא מהצורה $1+pt$.

4. (א) תהי G חבורה סופית ו- $H,K<G$. הוכח כי $|HK|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}$.
(ב) אם לכל p ראשוני המחלק את G קיימת תת חבורת p-סילו המוכלת רק ב- H או ב- K, הוכח כי $G=HK$.

5. (א) F שדה סופי. הוכח שקיים מספר ראשוני p כך שכל איבר $\neq 0$ ב- F הוא מסדר p בחבורה לחיבור.
(ב) הוכח שההעתקה $x\to x^p$ הוא אוטומורפיזם של F על עצמו. מהם האיברים הקבועים בהעתקה זו?

6. (א) הוכח ש- A_n נוצרת על ידי המחזורים באורך 3.
(ב) תהי $A_n\triangleright H$. הוכח שאם H מכילה מחזור באורך 3 ו- $n\geq 5$ אזי $H=A_n$.

יברסיטת תל-אביב.
ולטה למדעים מדוייקים
ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר א' תשמ"ה
8.2.85

אלגברה ב' 1

לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג

המורה: פרופ' קליין

הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות
על 5 שאלות
השתמש בחומר עזר.

—

G חבורה ו- $a, b \in G$ איברים מתחלפים מסדרים r, s בהתאמה.
הוכח כי G מכילה איבר מסדר $[r, s]$.

אם F שדה סופי, הוכח כי F^* ציקלית.

2

G חבורה מסדר n, $H \lhd G$, $a \in G$ ו- $r \geq 1$ מינימלי
$a^r \in H$.

הוכח כי Ha איבר מסדר r ב- G/H והסק ש- r/n.
ר שאם $s \geq 1$ ו- $a^s \in H$, אזי r/s.
זם $n = 50$ ו- $a \notin H$, כלומר $r > 1$, הוכח כי $a^{21} \notin H$.

חבורה סופית, $H < G$ ו- $[G:H] = m$.

כח שאם $|G| \nmid m!$, אזי G מכילה חבורה חלקית נורמלית
טריויאלית.

כח שאם p ראשוני, $p/|G|$ ו- $p > m$, אזי G מכילה
ורה חלקית נורמלית לא טריויאלית.

שאלה 4

יהי E שדה סופי.

א. הוכח שקיים p ראשוני ו- n טבעי כך ש- $|E| = p^n$.

ב. הוכח כי הקבוצה E מתלכדת עם קבוצת כל שורשי הפולינום $x^{p^n} - x$.

שאלה 5

א. G חבורה. אם $H \lhd G$ ו- G/H קומוטטיבית, הוכח כי H מכילה את חבורת הקומוטטור G'.

ב. אם $H, K \lhd G$ חבורות סופיות מסדרים זרים וכן G/K, G/H קומוטטיביות, הוכח כי G קומוטטיבית.

שאלה 6

א. p, q מספרים ראשוניים, $p > q$, וכן $q \neq 2$ או $p \neq 3$.
הוכח כי $p \nmid q^2 - 1$ והסק ש- $1 + kp \nmid q^2$
אלא אם כן $k = 0$.

ב. תהי G חבורה מסדר $p^2 q^2$ באשר p, q ראשוניים
ו- $p > q$. הוכח כי אם $P < G$ ו- $|P| = p^2$,
אזי $P \lhd G$ (דון בנפרד במקרה $q = 2$, $p = 3$).

שאלה 7

א. הוכח כי $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ איבר מסדר 12
ב- S_7.

ב. האם כל שני איברים מסדר 12 ב- S_7 צמודים? נמק טענתך.

ג. הצבע ע' שני איברים מסדר 6 ב- S_7 שאינם צמודים.

אוניברסיטת חיפה

מועד ב' - ספטמבר

27.9.87, תשמ"ח

אלגברה ב' 1

פרופ' י. קליין

הזמן: 3 שעות. ענה על 4 שאלות.

1. (א) G חבורה סופית, $K<G$, $H<K$ חבורת p-סילוב של K. הוכח שקיימת חבורת p-סילוב P של G כך ש- $H=P\cap K$.

(ב) האם מתוך $P\triangleleft G$ נובע $H\triangleleft K$?

2. (א) יהיו u,v אלגבריים מעל $\mathbb{Q}$ ממעלות $r,s>1$ בהתאמה. אם $(r,s)=1$ הוכח כי $\{u^iv^j\}$, $0\leq i\leq r-1$, $0\leq j\leq s-1$, בסיס של $\mathbb{Q}[u,v]$ מעל $\mathbb{Q}$.

(ב) אם $u\in\mathbb{R}$ שורש של x^3-x^2+3x+6 הראה כי $(u^2+3u-2)\sqrt{3}+2u^2-u$ אי רציונלי.

3. (א) תהי חבורה סופית. הוכח: אם היא נילפוטנטית, אזי היא המכפלה הישרה של חבורות הסילוב שלה.

(ב) האם המשפט ההפוך נכון?

4. (א) בנה שדה סופי אשר מספר איבריו 343.

(ב) כמה איברים בשדה שבנית מקיימים את המשוואה $x^{570}=1$?

5. יהי G חבורה שבה מתקיים $(ab)^6=a^6b^6$ לכל $a,b\in G$.

(א) הוכח כי $H=\{x^6|x\in G\}$ ו- $K=\{y\in G|y^6=1\}$ הן חבורות חלקיות נורמליות.

(ב) אם G סופית הוכח כי $|G|=|H||K|$ אם ורק אם ש- $H\cap K=\{1\}$.

6. יהי $\Phi_n(x)$ הפולינום הציקלוטומי ה-n-י.

(א) הוכח כי $x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$

(ב) חשב את $\Phi_{11}(x)$ ואת $\Phi_{12}(x)$.

מועד א' תשמ"ו
סמסטר ב' 20.6.86
מספר ת.ז. ______________

אלגברה ב' 1
פרופ' א. קליין

הבחינה מורכבת משני חלקים

<u>חלק א'</u>

<u>הזמן המוקצב: שעה ורבע</u>
אין להשתמש בחומר עזר
בכל שאלה יש לסמן <u>בעיגול ברור את התשובה הנכונה</u>
<u>סימון נכון מקנה 5</u> נקודות
<u>סימון מוטעה גורע 2</u> נקודות
שאלה ללא סימון או עם יותר מסימון אחד 0 נקודות
<u>יש להתייחס אל 10</u> מתוך 12 השאלות הבאות. במידה ותהיה התייחסות אל יותר שאלות ילקחו בחשבון 10 הראשונות שסומנו.

G מסמנת חבורה
$Z(G)$ המרכז של G
$N(H)$ הנורמליזטור של H ב-G

בהצלחה

1. מספר איברי S_7 המתחלפים עם $(123)(45)$ הוא:

א. 24

ב. 16

ג. 12

ד. 8

2. G מסדר אי-זוגי, $H<G$ מאינדקס 3. אזי

א. H מכילה קומוטטורים

ב. $N(H)=G$

ג. $Z(G)>H$

ד. אם $H \triangleleft G$ אזי $Z(G)<H$

3. מספר החבורות הקומוטטיביות מסדר $2^4 3^6 5^2$ הוא:

א. 175

ב. 165

ג. 150

ד. 210

4. R חוג עם 1 ו-I אידיאל ב-R.

א. אם R/I שדה אזי I מקסימלי.

ב. אם I מקסימלי אזי R/I שדה

ג. אם R קומוטטיבי אזי R/I שדה

ד. אם R/I שדה אזי R קומוטטיבי

5. המספר הראשוני הבא הוא יוצר של $U(50)$

א. 11

ב. 29

ג. 31

ד. 33

6. $H,K<G$ וכן $HK=KH$ אזי $H\lhd HK$ בתנאי ש-

א. $H<N(K)$

ב. $K\lhd G$

ג. H ו-K קומוטטיביות

ד. $K<N(H)$

ז. F שדה בן 64 איברים. מספר הפתרונות של $x^{27}=1$ ב-F הוא:

א. 1

ב. 27

ג. 3

ד. 9

8. $P_1,P_2<G$ חבורות p-סילו שונות (אותו p). אזי

א. $P_2N(P_1)\neq N(P_2)P_1$

ב. $P_1\cap P_2\neq 1$

ג. $N(P_1)\cap N(P_2)\neq 1$

ד. $N(P_i)\neq N(P_2)$

9. הפולינום הציקלוטומי $\Phi_{15}(x)$ שווה ל-

א. $x^8-x^7+x^5-x^3+x^2-x+1$

ב. $x^8-x^7+x^6-x^4+x^2-x+1$

ג. $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$

ד. $x^8-x^7+x^5-x^4+x^2-x+1$

10. $u\in\mathbb{R}$ מקיים $u^3-u^2+1=0$ אזי $7(u^2-4u+5)^{-1}$ שווה ל-

א. u^2+u+1

ב. u^2+u-1

ג. u^2-u-1

ד. u^2-u+1

11. G חבורה לא קומוטטיבית מסדר 385 ו- $Z(G)\neq 1$, אזי $|Z(G)|$ שווה ל-

א. 11

ב. 7

ג. 35

ד. 5

12. $u\in\mathbb{R}$ מקיים $u^3=2$ אזי $\mathrm{Irr}(u^2+1,\mathbb{Q})$ שווה ל-

א. x^3-2x^2+2x-6

ב. x^3-3x^2+3x-6

ג. x^3-3x^2+3x-5

ד. x^3-2x^2+2x-5

מועד א' תשמ"ו
סמסטר ב' 20.6.86
מספר ת.ז. ____________

אלגברה ב' 1
פרופ' א. קלין

חלק ב'

הזמן המוקצב: <u>שעה וחצי</u>. אין להשתמש בחומר עזר.
ענה על <u>שאלה ראשונה</u> (25 נק') ועל <u>אחת מבין שתי השאלות הנוספות</u> (25 נק').

1. G חבורה סופית, p ראשוני, $p \mid |G|$. הוכח כי מספר חבורות p-סילו ב-G הוא מהצורה $1+pt$.

2. א. P חבורת p-סילו ב-G ו- $x \in G$ איבר מסדר $p^s m$, $p \nmid m$. הוכח כי p^s מחלק את האקספוננט של P.
ב. $|G| = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, P_i חבורת p_i-סילו, $i=1,\dots,k$. הוכח כי האקספוננט של G שווה למכפלת האקספוננטים של כל ה-P_i.

3. א. יהיו p,q ראשוניים. הוכח שאם $q>p\geq 3$ וכן $1+qt / p^3$ אזי או $t=0$ או $1+qt=p^3$.
ב. הוכח שכל חבורה מסדר p^3q, p,q ראשוניים, אינה פשוטה (רמז: לדון בנפרד במקרה $p=2$).

יז בחשון, תשמו
1 באוקטובר, 1985

מבחן באלגברה ב1
מועד מיוחד

המורה: משה ירדן.
הזמן: שלש שעות.

ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות.

1. הוכח שכל חבורה חלופית נוצרת סופית A ניתנת להצגה כצורה

$$A = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^r$$

כאשר r הוא הדרגה של A ו $p_1,\dots,p_m$ הם מספרים ראשוניים. C63
באופן מדויק את משפטי העזר שאתה משתמש בהם בהוכחה.

2. תהיינה $N, H_1,\dots,H_r$ חבורות חלקיות נורמליות של חבורה G.
נניח ש $G = H_1\cdots H_r$ ו $N\cap H_i = 1$ עבור $i=1,\dots,r$. הוכח ש N
מוכל במרכז של G.

3. יהי σ איבר בחבורה הסימטרית S_n. נסמן ב $\langle\sigma\rangle$ את החבורה הנוצרת
על ידי σ. נניח ש $\langle\sigma\rangle$ פועלת באופן טרנזיטיבי על הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$
(כלומר לכל i ו j, $1\le i,j\le n$, קיים k כך ש $i^{\sigma^k}=j$). הוכח
ש σ הנו מחזור מאורך n.

4. נסח והוכח את משפט האיזומורפיזם השלישי של תורת החבורות.

5. הוכח שאם N הוא חבורה חלקית נורמלית של חבורה סופית G ו P הוא
חבורת סילו-p של N אזי $G = N\cdot N_G(P)$. רמז: כל שתי חבורות סילו-p
של N צמודות זו לזו על ידי איבר של N.

יב בתשרי, תשמו
27 בספטמבר, 1985

מבחן באלגברה ב1
מועד ב

הזמן: שלש שעות.

המורה: משה ירדן.

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
הערות: ללא חומר עזר

1. נתבונן במכפלה הישרה $G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ של חבורות. תהי N תת חבורה נורמלית של G המקיימת $N\cap H_i=1$ עבור $i=1,\ldots,n$. הוכח ש N מוכל במרכז של G.

2. הוכח שכל חבורה G מסדר 36 פתירה.

3. תהי G חבורה סופית. הוכח את הנוסחה

$$|G| = |Z| + \sum_{c\in C'} (G:Z(c))$$

כאשר C' הנה מחלקת מיצגים של מחלקות צמידות שאינן שייכות למרכז, Z המרכז של G ולכל $c\in C'$, $Z(c)$ הנו המרכז של c.

4. תהי G חבורה סופית ויהי p מספר ראשוני. הוכח שמספר חבורות סילו-p של G קונגרואנטי ל 1 מודולו p.

5. תהי U החבורה החלופית החפשית מדרגה n. הוכח שכל תת חבורה V של U הנה חלופית ודרגתה אינה עולה על n.

ג' באב, תשמ"ה
21 ביולי, 1985

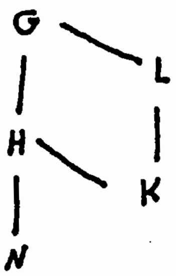
מבחן באלגברה ב1

המורה: משה ירדן

הזמן: 3 שעות.

פתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

1. בתרשים החבורות



נתון ש $N \lhd G$, $K \lhd L$, $G = NL$ ו $H = NK$.
הוכח ש $H \lhd G$.

2. א) הוכח שהמרכז של חבורת-p סופית G אינו טריביאלי.
ב) הסק שכל חבורה מסדר p^2 הינה חלופית.

3. יהי π איבר ב S_{17} שסדרו 17. הוכח ש π נתן להצגה כחשוק מאורך 17.

4. יהי p מספר ראשוני. נתבונן בחבורה $A = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z}$
כאשר $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l > 0$ ותת חבורה B. נניח ש
$B \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p^{\beta_i}\mathbb{Z}$ כאשר $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_k > 0$. הוכח ש $k \leq l$.

5. הוכח שכל חבורה מסדר 75 הינה פתירה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

ענה על 5 מתוך ה־10 השאלות הבאות. אין לענות על יותר מ־5 שאלות.

אין חומר עזר.

אלגברה ב1, סמסטר ב תשמ״ג (בורשטיין), מועד ~~שאלה~~ ב׳

הראה שבחבורה $H\times G$ הסדר של (h,g) הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $\mathrm{Ord}(g)$ ו $\mathrm{Ord}(h)$.

הראה שאם H ו K תת־חבורות נורמליות ב G הרי $H\cap K$ תת־חבורה נורמלית. תן דוגמה ש $H\cup K$ איננה חבורה.

יהי $k\in\mathbb{Z}_n$. הראה שאם k זר ל n הרי k הפיך.

הוכח שאם כל איבר ב G מסדר 2 הרי G קומוטטיבית.

$R_{2\times2}$ חוג המטריצות מסדר 2×2 מעל הממשיים. הראה שההעתקה $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=a$ היא הומומורפיזם של החבורה החיבורית אבל לא של החוג.

הגדר מהי פעולה של חבורה על קבוצה, ומהו מסלול של איבר. הוכח שאם שני מסלולים נחתכים הם מתלכדים.

הוכח שאם כל איברי H ו G/H הם מסדרים שהם חזקות של 7 אז גם כל איברי G הם מסדרים שהם חזקות של 7 (אם אתה מסתמך על משפט Cauchy דומה למספרים ראשוניים כלשהם — הוכח אותו תחילה).

$X=\{1,i,-1,-i\}$. ב S_X יהי σ_1 הפרמוטציה הכפלת כל איבר ב i. ויהי σ_2 הפרמוטציה העלאת כל איבר בחזקה שלישית.

בדוק את $\sigma_1\sigma_2$ כמכפלת ציקלוסים זרים.