

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשס"ט, מועד א'

תאריך: 6.3.09

מרצה: מיכה שריר

מתרגל: דן פלדמן

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

במבחן 6 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 5 מהשאלות יזכו אותך ב- 90 נקודות, ותשובות נכונות על כל השאלות ב- 100 נקודות.
- התשובה לכל שאלה מורכבת בד"כ משני חלקים, שעל כל אחד מהם להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, אך יש למסרה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות שמתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת אז הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות).

בהצלחה!

מס. מחברת

מס. ת.ז.

שאלה 1

נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, המיוצג ע"י רשימות שכנות, ונתונה תת-קבוצה $E' \subseteq E$ של קשתות "חשובות".

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, הבדוק אם קיים ב- G מסלול העובר דרך כל הקשתות של E' .

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 2

יהא $G=(V, E)$ גרף לא מכוון מיוצג עיני רשימות שכנות, עם משקל שלם $w(e)$ לכל קשת $e \in E$. לכל מספר ממשי x , נסמן ב- $G^{(x)}=(V, E^{(x)})$ את תת הגרף המורכב מכל הקשתות שמשקלן לכל היותר x . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את ה- x המקסימלי עבורו $G^{(x)}$ חסר מעגלים.

יעילות:**אלגוריתם:****הסבר:**

מס. מחברת

מס. ת.ז.

שאלה 3

נתון גרף לא מכוון $G=(V, E)$ המיוצג עידי רשימות שכנות, וצומת $s \in V$. לכל קשת $e \in E$ יש משקל שלם חיובי $w(e)$. לכל מסלול π בגרף היוצא מ- s נגדיר את משקלו להיות המשקל המקסימלי של קשתב- π . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב, לכל צומת $v \in V$, את המשקל המינימלי של מסלול מ- s ל- v .

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

מס. ת.ז.

מס. מחברת

שאלה 4

נגדיר את y^i להיות השכפול של המחרוזת y עם עצמה i פעמים. למשל, $(ab)^3 = ababab$. נגדיר את כמות השכפולים במחרוזת x להיות r אם $x=y^r$ עבור איזושהי מחרוזת y ו- r הוא מקסימלי עם תכונה זו (כלומר y מינימלי).

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמקבל כקלט מחרוזת $P[1...n]$ ומחשב לכל רישא $P_i=P[1...i]$ את כמות השכפולים ב- P_i . נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם.

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 5

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ על ידי רשימות שכנויות, ומשקל $w(e)$ חיובי לכל $e \in E$. הגרף מייצג רשת תקשורת, כאשר כל צומת מייצג משתמש, וכל קשת מייצגת קשר ישיר בין שני משתמשים. משתמש u יכול לשלוח הודעה למשתמש v אם קיים מסלול (מכוון) מ- u ל- v בגרף. משקל הקשת $(u,v) \in E$ הוא עלות הניתוק של הקשר הישיר בין המשתמשים u ו- v . כל צומת $v \in V$ מסווג כ"בוגר", "קטין", או "לא ידוע".

מטרתנו היא לחשב תת-קבוצה E' של קשתות הגרף כך שאם נמחק את כל קשתות E' מהגרף, לא יהיה מסלול משום צומת "קטין" לשום צומת "בוגר". תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המקבל כקלט את G, w , ואת סיווג הצמתים, ומחזיר קבוצת קשתות E' המקיימת את התכונה לעיל, בעלת משקל כולל מינימלי מבין כל הקבוצות המקיימות את התכונה.

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

מס. ת.ז.

מס. מחברת

שאלה 6

נתונה קבוצה E של n אינטרוולים על הישר $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ כשלכל אינטרוול $[a_i, b_i]$ יש משקל חיובי w_i . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב תת-קבוצה E' של E עם משקל כולל מקסימלי כך שכל האינטרוולים ב- E' זרים בזוגות (החיתוך של כל שניים ריק). (רמז: סדרו את האינטרוולים בסדר עולה של נקודות הקצה הימניות שלהם, וקבלו נוסחת נסיגה עבור $OPT(j)$, האופטימום עבור j האינטרוולים הראשונים.)

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר: