ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

# מבחן באלגוריתמים

## סמסטר ב' התשס"ט, מועד א'

**תאריך:** 2.7.2009

**מרצים:** פרופ' נוגה אלון, ד"ר איריס רוזנבלום

**מתרגלים:** רני הוד, דני פלדמן

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.

**בהצלחה!**

| | |
|---|---|
| | 1 |
| | 2 |
| | 3 |
| | 4 |
| | 5 |

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

## שאלה 1

נתונה סדרה $X = x_1x_2\cdots x_n$ כאשר לכל $1 \le i \le n$, $x_i \in \{a,b,c\}$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב רצף $x_ix_{i+1}\cdots x_{j-1}x_j$ עבורו מספר ההופעות של $a$ פחות מספר ההופעות של $b$ מקסימלי. במילים אחרות,

$$|\{p : i \le p \le j, x_p = a\}| - |\{p : i \le p \le j, x_p = b\}|$$

מקסימלי מבין כל הבחירות האפשריות ל־$i,j$ עבור $1 \le i \le j \le n$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 2

נתונים תבנית $P = p_1p_2\cdots p_m$ וטקסט $T = t_1t_2\cdots t_n$ מעל א"ב סופי $\Sigma$ ונתונה גם קבוצה לא ריקה $M \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא את כל ערכי $q$, $1 \le q \le n$, עבורם

$$|\{k : 1 \le k \le m, P_k \text{ is a suffix of } T_q\}| \in M$$

כאשר $X_i$ מסמן את הרישא באורך $i$ של מחרוזת $X$.

**דוגמא:** עבור $P = aabaac$, $T = abcbaabaaca$ ו־$M = \{1,3,5\}$ התשובה היא $\{1,5,7,9,10,11\}$.

**יעילות:**

**אלגוריתם והסבר:**

## שאלה 3

נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור $s$, בור $t$ ופונ' קיבול $c:E\to\mathbb{R}^+$ ונתונה זרימה $f$ ברשת. נניח שמצאנו מסילה משפרת $P:s\rightsquigarrow t$ ברשת השיורית $G_f$ שאורכה בקשתות מינימלי. תהיה $g$ הזרימה ברשת $G$ המתקבלת מ־$f$ לאחר שהזרמנו לאורך $P$ את הקיבול השיורי $c(P)$.

הוכח/הוכיחי כי לכל צומת $v\in V$ מתקיים $\delta_g(s,v)\geq\delta_f(s,v)$ כאשר $\delta_f,\delta_g$ הם המרחקים ברשתות השיוריות $G_f,G_g$ בהתאמה.

הוכחה:

## שאלה 4

תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר המקבל רשימה של $m$ דרישות ובודק האם קיים אוסף של $n$ קטעים פתוחים לא ריקים בישר $\mathbb{R}$, $I_k = (a_k, b_k)$ עבור $k = 1, 2, \ldots n$, המקיים את כל הדרישות. קיימים שני סוגים של דרישות:

1. הקטע $I_i$ נמצא כולו מימין לקטע $I_j$.
2. הקטעים $I_i$ ו־$I_j$ נחתכים.

**דוגמאות:**

1. אוסף הדרישות הבא לא ניתן למימוש:

(א) $I_1$ כולו מימין ל־$I_2$, (ב) $I_2$ כולו מימין ל־$I_3$, (ג) $I_1$ ו־$I_3$ נחתכים.

2. אוסף הדרישות הבא ניתן למימוש, למשל ע"י $I_1 = (1, 10)\,, I_2 = (5, 8)\,, I_3 = (0, 3)$:

(א) $I_1$ ו־$I_2$ נחתכים, (ב) $I_1$ ו־$I_3$ נחתכים, (ג) $I_2$ כולו מימין ל־$I_3$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 5

נתון גרף $G = (V, E)$ מכוון וקשיר בחוזקה המיוצג ע"י רשימות שכנות, נתונה פונקצית משקל $w : E \to \mathbb{R}$ ונתונים זוג צמתים שונים $u, v \in V$. ידוע שאין בגרף מעגל שלילי ביחס ל־$w$.

תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא, עבור כל ערך של $k$, $2 \leq k \leq |V| - 1$, את המשקל הקל ביותר של מסילה מכוונת $u \rightsquigarrow v$ שאורכה לכל היותר $k$ קשתות (אם יש כזו).

**הערה:** האלגוריתם מחשב, אם כן, $|V| - 2$ ערכים מ־$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר: