ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' התשס"ט, מועד א'

תאריך: 2.7.2009

מרצים: פרופ' נוגה אלון, ד"ר איריס רוזנבלום

מתרגלים: רני הוד, דני פלדמן

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

נתונה סדרה $X = x_1x_2\cdots x_n$ כאשר לכל $1 \leq i \leq n$, $x_i \in \{a,b,c\}$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב רצף $x_ix_{i+1}\cdots x_{j-1}x_j$ עבורו מספר ההופעות של a פחות מספר ההופעות של b מקסימלי. במילים אחרות,

$$|\{p : i \leq p \leq j, x_p = a\}| - |\{p : i \leq p \leq j, x_p = b\}|$$

מקסימלי מבין כל הבחירות האפשריות ל־i,j עבור $1 \leq i \leq j \leq n$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתונים תבנית $P = p_1p_2\cdots p_m$ וטקסט $T = t_1t_2\cdots t_n$ מעל א"ב סופי Σ ונתונה גם קבוצה לא ריקה $M \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא את כל ערכי q, $1 \le q \le n$, עבורם

$$|\{k : 1 \le k \le m, P_k \text{ is a suffix of } T_q\}| \in M$$

כאשר X_i מסמן את הרישא באורך i של מחרוזת X.

דוגמא: עבור $P = aabaac$, $T = abcbaabaaca$ ו־$M = \{1,3,5\}$ התשובה היא $\{1,5,7,9,10,11\}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s, בור t ופונ' קיבול $c:E\to\mathbb{R}^+$ ונתונה זרימה f ברשת. נניח שמצאנו מסילה משפרת $P:s\rightsquigarrow t$ ברשת השיורית G_f שאורכה בקשתות מינימלי. תהיה g הזרימה ברשת G המתקבלת מ־f לאחר שהזרמנו לאורך P את הקיבול השיורי $c(P)$.

הוכח/הוכיחי כי לכל צומת $v\in V$ מתקיים $\delta_g(s,v)\geq\delta_f(s,v)$ כאשר δ_f,δ_g הם המרחקים ברשתות השיוריות G_f,G_g בהתאמה.

הוכחה:

שאלה 4

תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר המקבל רשימה של m דרישות ובודק האם קיים אוסף של n קטעים פתוחים לא ריקים בישר $\mathbb{R}$, $I_k = (a_k, b_k)$ עבור $k = 1, 2, \ldots n$, המקיים את כל הדרישות. קיימים שני סוגים של דרישות:

1. הקטע I_i נמצא כולו מימין לקטע I_j.
2. הקטעים I_i ו־I_j נחתכים.

דוגמאות:

1. אוסף הדרישות הבא לא ניתן למימוש:

   (א) I_1 כולו מימין ל־I_2, (ב) I_2 כולו מימין ל־I_3, (ג) I_1 ו־I_3 נחתכים.

2. אוסף הדרישות הבא ניתן למימוש, למשל ע"י $I_1 = (1, 10)\,, I_2 = (5, 8)\,, I_3 = (0, 3)$:

   (א) I_1 ו־I_2 נחתכים, (ב) I_1 ו־I_3 נחתכים, (ג) I_2 כולו מימין ל־I_3.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

שאלה 5

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון וקשיר בחוזקה המיוצג ע"י רשימות שכנות, נתונה פונקצית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ ונתונים זוג צמתים שונים $u,v\in V$. ידוע שאין בגרף מעגל שלילי ביחס ל־w.

תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא, עבור כל ערך של k, $2\le k\le |V|-1$, את המשקל הקל ביותר של מסילה מכוונת $u\rightsquigarrow v$ שאורכה לכל היותר k קשתות (אם יש כזו).

הערה: האלגוריתם מחשב, אם כן, $|V|-2$ ערכים מ־$\{\infty\}\cup\mathbb{R}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר: