ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשס"ז

תאריך: 02.02.07

מרצה: פרופ' אורי צוויק

מתרגלים: סבטלנה אולונצקי ואמתי ערמון

משך הבחינה: 3½ שעות. (לא תינתן הארכה נוספת!).

חומר עזר מותר: דף A4 אחד כתוב משני הצדדים.

בבחינה זו 6 שאלות. יש לענות על **כל** השאלות שבמבחן.

משקל כל השאלות שווה. משקלי הסעיפים בכל שאלה שווים.

תשובה מלאה על 5 שאלות תזכה ב-90 נקודות.

את התשובות לשאלות יש לכתוב במסגרות המתאימות.

מחברת הבחינה תשמש כטיוטא בלבד ולא תיבדק.

נא למלא מס' ת.ז. ומס' מחברת בכל דף של חוברת הבחינה.

קראו בעיון את השאלות לפני שתתחילו לענות.

יש לתת אלגוריתם יעיל ככל האפשר לכל שאלה.

בכל השאלות שמתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת אז הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות).

בהצלחה!

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

א. מריצים DFS על גרף מכוון שבו הצמתים u ו-v נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה. האם u ו-v ימצאו בהכרח באותו עץ DFS?

תשובה: כן / לא

הוכחה / דוגמא נגדית

ב. מריצים DFS על גרף מכוון שבו יש מסלול מכוון מ-u ל-v. האם בהכרח יתקיים $d[v] \le f[u]$? כלומר, האם בהכרח הצומת v מתגלה לפני סיום הטיפול בצומת u?

תשובה: כן / לא

הוכחה / דוגמא נגדית

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 2

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון עם פונקצית משקל אי-שלילית $w:E\rightarrow R^+$, מוגדרת על קשתותיו. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר למציאת קבוצת קשתות E' שסכום משקליהן מינימלי כך שבגרף שמתקבל מ-G ע"י זריקת קשתות E' אין מעגלים.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחת נכונות:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

<u>שאלה 3</u>

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלים אי-שליליים $w:E\rightarrow R^+$ שמייצג רשת כבישים. (אם e היא קשת בגרף, אז $w(e)$ הוא אורך קטע הכביש שמיוצג ע"י e.) יהיו s ו-t שני צמתים ב-G ותהא $U\subseteq V$ קבוצה של k צמתים שמייצגים <u>תחנות דלק</u>. יהא L המרחק הארוך ביותר שאותו יכולה מכונית לנסוע ללא תדלוק. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר למציאת דרך הנסיעה הקצרה ביותר מ-s ל-t. (דרך נסיעה מ-s ל-t היא אפשרית אם אינה כוללת נסיעה שאורכה גדול מ-L ללא מעבר בתחנת דלק.)

סיבוכיות:
אלגוריתם:
הוכחת נכונות:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 4

נתונה רשת זרימה מכוונת $G=(V,E)$ עם קיבולים $c: E \to R^+$, ונתונה זרימה מקסימלית f. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק האם קיימת קשת ברשת שהגדלת קיבולה מאפשרת את הגדלת הזרימה.

סיבוכיות:
אלגוריתם:
הוכחת נכונות:

מס' מחברת: _____ ת.ז.: ____________

שאלה 5

יהא A מערך של n מספרים ממשיים. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר למציאת תת-קבוצה של איברי A שסכומה מקסימלי, תחת האילוץ שאסור לבחור לתת-קבוצה זאת שני איברים סמוכים מ-A.

סיבוכיות:
אלגוריתם:
הוכחת נכונות:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

שאלה 6

תהא $N=(G,c,s,t)$ רשת זרימה, כאשר $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון, $c: E\to R^+$ היא פונקציית קיבול, s הוא המקור, ו-t הוא הבור. נניח עתה, שמוגדרת גם פונקציית אמינות $r: E\to R^+$, כאשר עבור כל קשת e מתקיים $0\le r(e)\le 1$. אם $(u,v)\in E$ ו-$f(e)$ יחידות זרימה מוכנסות לקשת e דרך הצומת u, אז רק $r(e)f(e)$ יחידות זרימה אכן תגענה ל-v. צמתי הרשת הם אמינים לחלוטין, כלומר עבור כל צומת v שאינו המקור או הבור, כמות הזרימה שנכנסת ל-v שווה לכמות הזרימה שיוצאת מ-v.

א. הצג/י את בעיית מציאת כמות הזרימה המקסימלית שניתן להביא ל-t דרך הרשת כבעיית תכנות ליניארי.

ב. נניח עתה שברצוננו למצוא את הדרך היעילה ביותר להבאת בדיוק F יחידות זרימה אל t, כלומר הדרך שבה תלך לאיבוד כמות מינימלית של זרימה. הצג/י גם בעיה זאת כבעיית תכנות ליניארי.

בהצלחה!!!