

תורת הגרפים

לתלמידי מחימטיקה שנים ב-ג

המורה: ד"ר נוגה אלון

משך הבחינה:

ענה על 6 מתוך 7 השאלות הבאות.

מותר להשתמש בכל חומר עזר.

השתדל לא לכתוב יותר מעמוד אחד כפתרון לכל שאלה.

שאלה 1

כמה גשרים, לכל היותר, יכול להכיל גרף G רגולרי בעל n צמתים?

שאלה 2

הראה דוגמא של גרף פשוט בעל ערכיות מינימלית $\delta = 4$ ללא משולשים.

שאלה 3

הראה שאם G גרף קשיר, וכל ערכיותו זוגית, הרי לכל צומת v בעלת ערכיות $d(v)$ ב- G , מספר רכיבי הקשירות של $G-v$ אינו עולה על $\frac{1}{2} d(v)$.

שאלה 4

יהא $G=(V,E)$ גרף דו צדדי בעל קבוצות צמתים X ו- Y ונניח כי לכל $S \subseteq X$
 $N(S) = \{y \in Y : \exists x \in S, xy \in E\}$ באשר $|N(S)| \geq 2|S|$

הוכח כי קיים תת גרף של G בו לכל צומת של X ערכיות בדיוק 2, ולכל צומת של Y ערכיות לכל היותר 1.

שאלה 5

מהו האינדקס הכרומטי $\chi'(K_{201})$ של הגרף השלם על 201 צמתים?

שאלה 6

א. הראה כי כל גרף פשוט בעל $2k$ צמתים ופחות מ- $k^2 - k$ קשתות מכיל תת קבוצה בלתי חלופה מגודל 3.

ב. הראה דוגמא של גרף פשוט בעל $2k$ צמתים ו- $k^2 - k$ קשתות שאינו מכיל תת קבוצה בלתי חלופה מגודל 3.

שאלה 7

יהא G גרף מישורי פשוט בעל n צמתים ובעל ערכיות מינימלית $\delta(G) = 5$.

- א. הראה כי $n \geq 12$.
- ב. הראה כי אם $n = 12$ הרי G קשיר.

בהצלחה!!!