

סמסטר א', מועד א', תשנ"ט  
 תאריך הבחינה: 21.03.1999  
 מספר קורס: 0365-2111

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים  
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשב כיס.  
 סה"כ הנקודות הוא 125. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

נסח והוכח את הלמה הראשונה של בורל-קנטלי.

=20

שאלה 2

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה,  $\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{10}$  לכל  $n$  ו- $i = 0, 1, \dots, 9$ .  
 נגדיר  $Y_n = \min\{y : X_y = X_{y+n}, X_{y+1} = X_{y+n+1}, \dots, X_{y+n-1} = X_{y+2n-1}\}$   
 דוגמה:

$X = 2718281828 \ 4590452353 \ 6028747135 \ 2662497757 \ 2470936999 \ 5957496696 \ \dots$   
 $\quad \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \ \uparrow \ \uparrow$   
 $\quad \quad \quad Y_4 = 3 \quad \quad \quad Y_1 = 32 \quad \quad \quad Y_2 = 50$

(א) הראה שכמעט בטוח כי  $Y_n > 9^n$  לכל  $n$  מספיק גדול.

=10

רמז:  $\mathbb{P}(Y_n \leq a) \leq \frac{a}{10^n}$

(ב) הראה שכמעט בטוח כי  $Y_n \leq 11^n$  לכל  $n$  מספיק גדול.

=10

רמז:  $1 - \epsilon \leq e^{-\epsilon} ; \mathbb{P}(Y_n > 2an) \leq (1 - 10^{-n})^a$

(ג) חקור את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Y_n}{n}$

=10

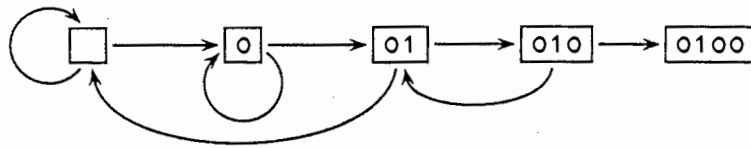
שאלה 3

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה,  $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ . נגדיר  
 $Y = \min\{y : X_y = 0, X_{y+1} = 1, X_{y+2} = 0, X_{y+3} = 0\}$   
 דוגמה:

$X = 1001010110 \ 0111011010 \ 0001010010 \ \dots$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 $Y = 18$

מצא  $\mathbb{E}(Y)$  =20

רמז:



שאלה 4

כל יום לקוח בוחר באחת משתי חנויות וקונה מוצר. מוצר מהחנויות הראשונה הוא איכותי בהסתברות  $1-\alpha$ , ומהחנויות השניה בהסתברות  $1-\beta$ . אם אתמול המוצר הייה איכותי, הלקוח בא לאותה החנות, ואם לא איכותי — לחנות האחרת.

.....  
 (א) כל מוצר נמכר מביא רווח  $b$  לחנות. מצא רווח ממוצע (עמיד) לכל החנות. =5

.....  
 (ב) היום הלקוח בא לחנות הראשונה, ויש לחנות הזדמנות למכור לו מוצר איכותי על בטוח, לאחר שתתבצע בו בדיקה. כמה כדאי לחנות לשלם בעד הבדיקה? =20

שאלה 5

בהנתן שיש  $n$  חולים, במשך זמן אינפיניטימלי  $dt$  כל חולה מבריא בהסתברות-  
 ות  $a_n dt$ , זמדביק בריא אחד בהסתברות  $b_n dt$ . נניח שהאוכלוסייה היא אינסופית,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(b_n - 1) = B$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$   
 מרקוב מתקיימת, ויש בהתחלה חולה אחד.

.....  
 (א) אם החולה האחרון מבריא, התהליך מסתיים. האם הוא יסתיים כמעט בטוח? חקור  
 בהתאם ל-  $A, B$ . =10

(ב) יש חולה כרוני אחד שלעולם לא יבריא (ולא ימות). נתבונן בהסתברות שכל האחרים בריאים. האם ההסתברות שואפת ל-0 (כאשר הזמן שואף ל- $\infty$ )? חקור בהתאם ל- $A, B$ .

=10

(ג) יש חולה כרוני אחד. האם מספר החולים ישאף ל- $\infty$  כמעט בטוח? חקור בהתאם ל- $A, B$ . האם יתכן שמספר החולים יהיה חסום לעולם?

=10

רמז:  $\frac{1}{n+c} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  ;  $\frac{1}{1 + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

---



---