פתרון הבחינה מ 19/9/02

חלק ראשון

שאלה 1

כן, תמיד

אם P בלתי פריקה אז בה מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר. מסלול משתמש במעברים שבהם אברי המטריצה גדולים מאפס. עבור כל i, j שעבורם $P_{i,j} > 0$ גם האיבר במקום ה i, j במטריצה $\frac{1}{2}(P+Q)$ הוא גדול מאפס. המחזור הוא 1 אם המחלק המשותף המכסימלי של כל אורכי כל המסלולים ממצב לעצמו הוא 1. שוב כל אורך של מסלול שאפשרי בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא P אפשרי גם בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$.

שאלה 2

לעולם לא

אם לכל מצב ניתן להגיע ב d צעדים, אז אם יש מצב שממנו יש מעבר ישיר למצב 1 אז ניתן להגיע ממצב 1 לעצמו ב $d+1$ צעדים. אם אין מצב שממנו יש מעבר ישיר למצב 1 אז מצב 1 אינו בעל מחזור d. אם כן יש מצב כזה אז ניתן לחזור מ 1 ל 1 בכפולות של d וגם ב $d+1$ צעדים ולכן המחזור שלו אינו d.

שאלה 3

תמיד

עבור i, j כך שאין מסלול מ i ל j , עבור כל n, במטריצה P^n האיבר ה- i, j הוא אפס וגם הממוצע הוא אפס. אם j מצב חולף או מצב נשנה אפס, אז הגבול של האיבר ה- i, j במטריצה P^n כאשר $n \to \infty$ הוא אפס וגם הממוצע שואף לאפס. אם יש מסלול מ i ל j ול j יש מחזור d, אז יש שאיפה לממוצע של d גבולות.

שאלה 4

בינומית עם פרמטרים $p = \frac{2}{5}$, $n = 10$

הסתברות מותנה:

$$\frac{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-3\lambda}\frac{(3\lambda)^{10-k}}{(10-k)!}}{e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^{10}}{10!}} = \cdots$$

שאלה 5

סכום של שני משתני מעריכיים בלתי תלויים, אך שוני קצב.

לאחר שהתקבל המינימום בין השלושה, יש צפייה למינימום בין השניים הנותרים. אחר-כך יש צפייה לאחרון. זמן הצפייה למינימום של שניים מתפלג $\exp(2\lambda)$ וזמן הצפייה לאחרון מתפלג $\exp(\lambda)$.

חלק שני

שאלה 1

א. אם $a<0.5$ אז כאן $\pi_0>0.5$. מתקיים תמיד: $\pi_0=\pi_0 P_{0,0}+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i P_{i,0}$

אילו היה מתקיים $P_{0,0}=0$ אז היינו מקבלים:

$$\pi_0 \le \pi_0\cdot 0+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\cdot 1=1-\pi_0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0\le 0.5$$

אך כאמור $\pi_0>0.5$ ומתקבלת סתירה.

פתרון בדרך נוספת

מכיון ש $\pi_0\ge 0.5$ אז תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא קטנה מ 2. לכן לא יתכן שבהסתברות 1 נחזור למצב 0 ביותר מצעד אחד (לפחות שני צעדים). לכן יש הסתברות חיובית שנחזור למצב 0 בצעד אחד.

ב. נניח שמתקיים עבור כל $i\ge 1$: $P_{i,0}=1$, מתקיים עבור כל $i\ge 1$: $P_{0,i}=0.5^i$ ($\sum_{i=1}^{\infty}0.5^i=1$)

ומתקיים $P_{0,0}=0$. שימו לב ש $\pi_0=0.5$ ($\pi_0=\pi_0\cdot 0+(1-\pi_0)\cdot 1$).

שאלה 2

מצב 1- עובר אוטובוס , מצב 2-עוברת מכונית.

מטריצת המעבר היא:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

זו היא מטריצת מעבר של שרשרת בלתי פריקה ולא מחזורית. (לא מחזורית, למשל כי ניתן לחזור ממצב לעצמו בצעד אחד.) לכן קיימת התפלגות גבולית ששווה להסתברות הסטציונרית.

$$\begin{cases} 0.5\pi_1+0.1\pi_2=\pi_1 \\ 0.5\pi_1+0.9\pi_2=\pi_2 \\ \pi_1+\pi_2=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \pi_1=\frac{1}{6}$$

וזאת היא הפרופורציה של האוטובוסים מבין כלל הרכבים.

<u>שאלה 3</u>

הטענה אינה נכונה. נפריך אותה על-ידי מתן דוגמא:

שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים האי שליליים. עבור כל מצב $n \ge 1$ עוברים ממצב 0 למצב n בעצמה $\frac{c}{n^3}$ (c נבחר כך ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^3}=1$). מכל מצב $n \ge 1$ עוברים רק למצב $n-1$, זאת לאחר ששוהים בו זמן המתפלג מעריכית עם תוחלת 2^n. עבור כל מצב $n \ge 1$ ההסתברות שממצב 0 עוברים ישירות אליו היא $\frac{1}{n^3}$ (תחרות בין משתנים מעריכיים על העזיבה את מצב 0).

השרשרת היא אי-פריקה. היא נשנית כי תמיד חוזרים למצב 0 לאחר זמן סופי.

תוחלת מספר הקפיצות עד חזרה ממצב 0 למצב 0 היא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(n+1)<\infty$. לכן השרשרת בזמן הקפיצות היא נשנית חיובית.

תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 היא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}2^i\right)\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}=\infty$. לכן לתהליך הכולל אין התפלגות סטציונרית.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. זו שרשרת עם $n+1$ מצבים. נרשום את האיברים השונים מאפס ביוצר:

$\Lambda_{0,0}=-\lambda \quad , \quad \Lambda_{0,1}=\lambda$

עבור כל $i \le 1 \le n-1$: $\Lambda_{i,i-1}=i\mu \quad , \quad \Lambda_{i,i+1}=\lambda \quad , \quad \Lambda_{i,i}=-(i\mu+\lambda)$

עבור $i=n$: $\Lambda_{n,n-1}=n\mu \quad , \quad \Lambda_{n,n}=-n\mu$

בכל המצבים חוץ מהמצב שבו השרשרת מלאה, נקלטים לקוחות באותו קצב. כאשר המערכת מלאה אז הם נדחים. מכיוון שכל לקוח שנמצא במערכת הוא משורת אז, עצמת העזיבה היא פרופוציונלית למספר הלקוחות שבמערכת.

<u>ב</u>. זאת היא שרשרת סופית בלתי פריקה, לכן קיים וקטור הסתברויות סטציונרי יחד.

<u>ג</u>. שימו לב שמתקיים תנאי האיזון המפורט.

$$\pi_0\lambda=\pi_1\mu$$
$$\pi_1\lambda=\pi_2\cdot 2\mu$$

עבור כל $1\le k\le n$ מתקיים $\pi_{k-1}\lambda=\pi_k\cdot k\mu$

לכן מתקיים: $\pi_k=\pi_0\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}$

מכיוון ש $\sum_{k=0}^{n}\pi_k=1$ אז $\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}}$.

שלומי