

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים
המוצה: פרופ' ד. גילת

- משך הבחינה שלוש שעות
- ללא חומר עזר

בהצלחה !

חלק ראשון (25 נקודות)

לגבי כל אחת מחמש השאלות הבאות בחר אחת (ורק אחת) משלוש החלופות הנתונות. בחירה נכונה נושאת 5 נקודות זכות. 2 נקודות תורדנה עבור בחירה שגויה ונקודת בונוס אחת תינתן עבור טענת לא יודעת.

1. P, Q מטריצות מעבר של שרשרת מרקוב אי פריקות ואי מחזוריות מאותו מימד, האם

$$\frac{1}{2}(P+Q)$$

היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב אי פריקה ואי מחזורית?

א. כן, תמיד ב. לפעמים כן ולפעמים לא ג. לעולם לא

2. בשרשרת מרקוב בעלת מחזור $1 < d$ אפשר להגיע מכל מצב לכל מצב ב- d צעדים.

א. תמיד ב. לפעמים כן ולפעמים לא ג. לעולם לא

3. תהי P מטריצת מרקוב על מרחב מצבים סופי או בן מניה. אזי קיימת המטריצה

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P^n$$

הגבולית

א. תמיד ב. רק כאשר P אי פריקה ונשנית-אפס

ג. רק כאשר P אי פריקה ונשנית חיובית.

4. בתהליך פואסון $N(t)$ בעל קצב $0 < \lambda$ ההתפלגות המותנה של $N(2)$ בהינתן

$$N(5) = 10$$

היא:

א. בינומית עם פרמטרים $n = 10, p = \frac{2}{5}$

ב. התפלגות זו תלויה ב- λ

ג. בינומית עם פרמטרים $n = 5, p = \frac{3}{10}$

5. יהיו X, Y, Z משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות מעריכית עם קצב $0 < \lambda$.

יהי m המינימום שלהם ו- M המכסימום שלהם. אזי ההפרש $M - m$ מפולג כמו:

א. סכום של שני משתנים מעריכיים בלתי תלויים, ושוי קצב.

ב. סכום של שני משתנים מעריכיים בלתי תלויים, אך שוני קצב.

ג. אף אחד מהנייל.

חלק שני (75 נקודות)

ענו על 3 בלבד מתוך 4 השאלות הבאות:

1. ההסתברויות הסטציונריות - של שרשרת מרקוב אי פריקה ניתנות על ידי

$$\pi_i = (1 - \alpha)\alpha^i \quad \text{עבור } i = 0, 1, 2, \dots$$

$$(18) \text{ א. הוכיחו שאם } \alpha < \frac{1}{2}, \text{ אז } p_{0,0} > 0.$$

$$(7) \text{ ב. עבור } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ תנו דוגמה למטריצת מעבר אשר בה } p_{0,0} = 0.$$

2. בכביש בין-עירוני נעים אוטובוסים וכלי רכב אחרים שנקרא להם בקיצור **מכוניות**. הנתונים

הסטטיסטיים מראים שבממוצע אחרי כל מכונית עשירית נוסע אוטובוס ואילו אחרי כל אוטובוס שני נוסעת מכונית.

מהו אחוז האוטובוסים מבין כל כלי הרכב הנעים בכביש?

הסבירו את תשובתכם באמצעות מודל הסתברותי מרקובי.

3. יהי $\{X(t)\}$ תהליך קפיצה מרקובי בזמן רציף, ותהי $\{Y_n\}$ שרשרת המרקוב של

הקפיצות שלו.

תנו דעתכם על הטענה הבאה: אם $\{Y_n\}$ אי פריקה ונשנית חיובית, אז לתהליך הכולל

$\{X(t)\}$ יש התפלגות סטציונרית.

אם לדעתכם הטענה נכונה, הוכיחו אותה ואם לאו - הפריכו אותה באמצעות דוגמה נגדית.

(הפרכה כוללת הוכחה שהדוגמה היא אמנם דוגמה נגדית לטענה).

4. לתחנה עם n שרתים בלתי תלויים ובעלי זמני שרות מעריכיים עם קצב μ כל אחד,

מגיע זרם צרכנים פואסוני, בלתי תלוי בתהליך השרות, עם קצב λ . כאשר מגיע צרכן

לתור וכל העמדות תפושות, הוא עוזב את התחנה. יהי $X(t)$ מספר הצרכנים בתחנה בזמן t

(9) א. מצאו את היוצר האינפיניטיסמלי של התהליך.

(9) ב. מהו התנאי לקיום וקטור הסתברות סטציונרי! הוכיחו!

(7) ג. מה ההסתברות הסטציונרית של המצב 0? (כאשר היא קיימת)