

פתרון תרגיל 9 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נתאר יוצר אינפיניטסימלי של שרשרת כזאת שמרחב מצביה הוא השלמים האי שליליים.

$$\lambda_{0,1} = 1, \quad \lambda_0 = -1$$

$$\lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = 1, \quad \lambda_{2,4} = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_{3,4} = 2, \quad \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_{i,i+1} = 1, \quad \lambda_i = -1 : i \geq 4$$

עבור כל $i \geq 4$: $\lambda_i = -1$, $\lambda_{i,i+1} = 1$.
כל האיברים האחרים של היוצר שווים לאפס.

כאשר מתחילים במצב $i \geq 4$ אז התפלגות הזמן עד הקפיצה ה- n ית-שווה להתפלגות הסכום של n מ"מ $\exp(1)$ ב"ת. בפרט, התפלגות הזמן עד הקפיצה השניה שווה לסכום של שני משתנים $\exp(1)$ ב"ת. כאשר מתחילים במצב 0 אז הקפיצה הראשונה היא למצב 1 והתפלגות הזמן שהיא קורת היא $\exp(1)$. הקפיצה השניה היא ממצב 1 למצב 2 והתפלגות הזמן בין הקפיצה הראשונה לשניה היא $\exp(2)$. לכן כאשר מתחילים במצב 0 אז התפלגות הזמן עד הקפיצה השניה היא סכום של שני מ"מ מעריכיים שונים פרמטר ב"ת. כאשר מתחילים במצב 2 אז זמן הקפיצה הראשונה מתפלג $\exp(2)$. לאחריה מגיעים למצב 3 בסיכוי 0.5 או למצב 4 בסיכוי 0.5. זמני השהות במצבים 3 ו 4 הם בעלי התפלגות שונה. לכן הזמן בין הקפיצה הראשונה לקפיצה השניה מתפלג בסיכוי 0.5, $\exp(2)$ ובסיכוי 0.5, $\exp(1)$. קומבינציה של מ"מ מעריכיים אינה בעלת התפלגות מעריכית. התפלגות הזמן עד הקפיצה השניה היא סכום של משתנה מעריכי ומשתנה שאינו מעריכי.

שאלה 2

בכל ביקור במצב הראשון, זמן השהות בו מתפלג $\exp(4)$ ובכל אחד משני המצבים האחרים זמן השהות בכל ביקור מתפלג $\exp(1)$. מהמצב הראשון כמובן שעוברים לאחד משני המצבים האחרים. מכל אחד משני המצבים האחרים עוברים בהכרח ישירות למצב הראשון. כך בעשרת השהויות הראשונות בהכרח יש 5 שהויות במצב הראשון ו 5 שהויות במצבים האחרים. לכן בכל מקרה הזמן עד הקפיצה העשירית מתפלג כסכום של עשרה משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים ש 5 מהם מתפלגים $\exp(4)$ ו 5 מהם מתפלגים $\exp(1)$.

שאלה 3

$$\lambda_{0,2} = \lambda, \quad \lambda_0 = -\lambda$$

עבור כל $1 \leq i < \infty$: $\lambda_i = -(\lambda + i)$, $\lambda_{i,i+2} = \lambda$, $\lambda_{i,i-1} = i$.
(כאשר נמצאים במצב i , אז i לקוחות משורתים והתחרות למעבר למצב הבא היא בין i סיומי שירות וזרם המגיעים לתחנה שהו בעצמה λ).

שאלה 4

א.

$$\begin{cases} (-2)\pi_1 + 4\pi_2 + 1\pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 8\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 4\pi_2 - 2\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ומתקיים } \pi_2 = \frac{1}{9}, \pi_1 = \pi_3 = \frac{4}{9}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{4}{4+4} & 0 & \frac{4}{4+4} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

ג. מדובר בשרשרת אי פריקה ולא מחזורית (ניתן לחזור לכל מצב לאחר שני צעדים וגם אחר שלושה

צעדים). וקטור ההסתברויות הסטציונרי היחיד הוא $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. לכן לכל מצב יש הסתברות

גבולית של $\frac{1}{3}$.

ד. בזמני הקפיצות יש לכל מצב הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$, אך במצב 2 כל שהות היא בממוצע קצרה

יותר מאשר במצבים האחרים. (משך זמן של שהות בודדת במצב 2 מתפלג $\exp(8)$ ובכל אחד מהמצבים האחרים משך שהות בודדת מתפלג $\exp(2)$).

ה.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כאן לגבי כל המצבים יש אותה התפלגות של שהות רצופה: $\exp(2)$.

שאלה 5

צריך לבחור שעון עם קצב של לפחות 8. נבחר שעון עם קצב $\lambda = 8$ ונקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8t} \frac{(8t)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^k$$

או אם נבחר שעון בקצב $\lambda = 16$ נקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-16t} \frac{(16t)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{12}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{8}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{15}{16} \end{pmatrix}^k$$

שלומי