

פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

| | | | | | |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |
| 4 | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

(בכל מצב קבלת תוצאת קוביה של 6 תביא לאותו מצב כמו תוצאת קוביה של 1. כל תוצאת קוביה אחרת תביא למצב אחר מכל תוצאה שונה ממנה.)
 מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (אפילו בצעד אחד). לכן כל המצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה אחת של מצבים ארגודים. מכיון שהמחלקה היא סופית, אז היא מהווה מחלקה של מצבים נשנים.

שאלה 2

את מצב 1 לא ניתן לעזוב כאשר נמצאים בו. לכן הוא מהווה מחלקה של מצב נשנה (מצב שלא ניתן לעבור ממנו לשום מצב אחר נקרא מצב סופג).
 ממצב 4 יש מסלול למצב 5 וממצב 5 יש מסלול למצב 4. לא ניתן לעבור מהם למצבים אחרים. לכן הם מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים.
 ממצב 7 יש מעבר למצב 8 וממצב 8 יש מעבר למצב 7. אי אפשר לעבור מהם למצבים אחרים, לכן הם מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים.
 ממצבים 2 ו 3 יש מסלול למצבים שאין מהם דרך חזרה למצבים 2 ו 3. לכן מצבים 2 ו 3 הם לא ארגודיים ולכן הם חולפים.

שאלה 3

- א.** יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ התוצאות של הטלות ב"ת של מטבע עם סיכוי p להצלחה. במקרה זה גם $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרת הטלות ב"ת של מטבע כזה.
- ב.** יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תוצאות של הטלות של מטבע הוגן שעל צד אחד שלו כתוב 0 ועל הצד השני כתוב 1. נניח שכל ההטלות חוץ מההטלות 1 ו 9 הן ב"ת בכל הטלה אחרת ונניח שהטלה 9 היא העתק של ההטלה 1. X_1 מוסיף מידע לגבי X_9 , שלא נמצא ב X_8 . Y_1 מוסיף מידע לגבי Y_3 שלא נמצא ב Y_2 .
- ג.** יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תוצאות ההטלות של מטבע הוגן שעל צד אחד שלו כתוב 0 ועל הצד השני כתוב 1. נניח שכל ההטלות חוץ מההטלות 1 ו 8 הן ב"ת בכל הטלה אחרת ונניח שהטלה 8 היא העתק של ההטלה 1. X_1 מוסיף מידע לגבי X_8 שלא נמצא ב X_7 .

- ז. נניח ש $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 0.5$ ומתקיים לכל $n \geq 1$: $P(X_n = X_{n-1} + 1) = 1$.
 כך שערכו של Y_n אפילו נקבע באופן מוחלט ע"י ערכו של Y_{n-1} . בהינתן ש $Y_0 = 1$ או $Y_1 = 2$,
 אבל בהינתן $Y_1 = 1$ אז $Y_2 = 4$ כי Y_1 הוא X_1 ו Y_2 הוא X_4 .
- ה. נניח ש $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 0.5$ ונפרט את הסתברויות המעבר: אם $X_0 = 0$ אז בהכרח
 $X_1 = 1$ ואם $X_0 = 1$ אז בהכרח $X_1 = 3$, אם $X_1 = 1$ אז בהכרח $X_2 = 2$. עבור כל n אם
 $X_n = 2$ או $X_n = 3$ אז $X_{n+1} = 3$, כך שאם מגיעים ל 3 אז נשארים בו תמיד.
 שני התהליכים הם מרקוביים כי המצב בשלב מסוים בתוספת ערכה של התקופה קובעים באופן
 מוחלט את המצב בשלב הבא. התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו הומוגני בזמן כי יש הבדל לגבי הצעד הבא
 אם $X_0 = 1$ או $X_1 = 1$. התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הומוגני בזמן כי בו בכל מקרה ממצב 0 עוברים
 למצב 1 (בגלל תנאי ההתחלה, במצב 0 יכולים להיות רק בשלב 0) וממצב 1 בכל מקרה עוברים
 למצב 3 (בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הערך 2 היה יכול להתקבל רק ע"י המשתנה בעל האינדקס 2 ומשתנה
 זה לא מופיע בסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$).
- א. יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תוצאות של הטלות של מטבע הוגן שעל צד אחד שלו כתוב 0 ועל הצד השני כתוב 1.

$$P(Z_9 = 2 | Z_8 = 0) = P(X_9 = 1, X_{81} = 1 | Z_8 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} > 0$$
 אך $P(Z_9 = 2 | Z_8 = 0, Z_3 = 0) = 0$ כי $Z_3 = 0$ אומר שבטלה התשיעית התקבל 0.
 לכן ערכו של Z_3 נותן מידע על Z_9 שלא נמצא ב Z_8 .

שלומי