פתרון תרגיל 9 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. עבור כל $i \geq 0$: $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ ו $\Lambda_{i,i} = -\lambda$. יתר אברי היוצר הם אפס.

ב. עבור כל $i \geq 1$: $-\lambda\pi_i + \lambda\pi_{i-1} = 0$.

ג. המשוואות גוררות ש $\pi_i = \pi_j$ עבור כל $i \neq j$. אם היה מתקיים שהקבוע שאליו כל אחד מהם שווה הוא חיובי ממש, אז סכום רכיבי הוקטור היה שווה לאינסוף. בוקטור סטציונרי סכום הרכיבים צריך להיות שווה ל 1.

שאלה 2

א. נרשום מערכת לחישוב הוקטור הסטציונרי:

$$\begin{cases} -3\pi_1 + 3\pi_2 + 3\pi_3 = 0 \\ 2\pi_1 - 6\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 3\pi_2 - 4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל פתרון $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = \frac{3}{14}$, $\pi_3 = \frac{4}{14}$

ב. עוצמת המעברים ממצבים 2 ו 3 למצב 1 הם זהים. לכן לגבי הסתברויות המעבר למצב 1, ניתן להסתכל על שרשרת מצומצמת שבה מצבים 2 ו 3 מכווצים למצב בודד.
היוצר של שרשרת זו הוא:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

בכיתה ראינו פיתוח כללי של הסתברויות המעבר בשרשרת בעלת שני מצבים.
לגבי שרשרת עם יוצר

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

מתקבלת הסתברות מעבר $P_{1,1}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$

לכן כאן $P_{1,1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6t}$.

ג. מתקיים $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t}\right) = \frac{1}{2}$ וזאת ההסתברות הסטציונרית של מצב 1 שאותה חישבנו בסעיף הראשון.

<u>שאלה 3</u>

בשרשרת זו יש וקטור סטציונרי יחיד $(0.5,0.5)$.

יש שאיפה של המשתנים $X(t)$ ו $X(2t)$ למשתנים בעלי התפלגות סטציונרית. כמו כן, כאשר $t \to \infty$ התלות בין המשתנים נעלמת כי יש רווח זמן ששואף לאינסוף בינהם. כל אחד משני המשתנים מקבל את הערכים 1 ו 2 בהסתברויות ששואפות להיות שוות וזאת בלי קשר למצב ההתחלתי.

לכן מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2} = 1.125$$

שלומי