

פתרון תרגיל 10 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

- א.** לא בשרשרת מרקוב בזמן רציף, זמן השהות במצב מתפלג מעריכית. כאן עבור כל מצב $i \geq 1$, לא נשהה בו ברציפות יותר מיחידת זמן אחת (יתכן שפחות). משתנה שחסום על-ידי קבוע איננו משתנה מעריכי.
- ב.** לא במצבים השונים יש קפיצות מהם שיכולות להיגרם מהצטרפות לקוח או עזיבת לקוח. אם אנו במצב 2 והיינו קודם במצב 3 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד יחידת זמן אחת ואם קודם היינו במצב 1 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד פחות מיחידת זמן אחת כי אנו כבר היינו בזמן שירות. לכן במקרה זה ההסתברות שהקפיצה הבאה תהיה של עזיבה היא גדולה יותר מאשר במקרה הראשון.
- ג.** כן מספר הצרכנים שבמערכת בזמן סיום שירות נותן לנו את כל האינפורמציה להמשך. אם המערכת לא נשארה ריקה אז יש התפלגות קבועה של מספר המגיעים לשירות עד תום השירות הקרוב. אם המערכת נשארה ריקה אז יש את אותה התפלגות של מספר המגיעים עד תום השירות הבא.

שאלה 2

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t .

$$y'(t) = \lambda - \mu y(t)$$

הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + ce^{-\mu t}$$

כדי לעמוד בתנאי ההתחלה שהוא $y(0) = 1$ צריך להתקיים:

$$c = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

ולכן נקבל פתרון

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-\mu t}$$

שאלה 3

- א.** למשל מצבים סופגים: במקרה זה הגבול שווה להסתברות להגיע אליהם. מצבים חולפים או מצבים נשנים אפס: במקרים אלה הגבול שווה לאפס עבור כל מצב התחלתי. וגם כל מצב נשנה חיובי לא מחזורי: במקרה זה הגבול שווה למכפלה של ההסתברות להגיע אליו בהסתברות הסטציונרית שלו. במקרה זה הגבול תלוי בזהות המצב ההתחלתי- בהסתברות להגיע אליו מהמצב ההתחלתי.
- אם מצב הוא נשנה חיובי ומחזורי אז הגבול לא קיים עבור כל מצב התחלתי. למשל ממנו עצמו ניתן להגיע אל עצמו רק במספרים מסוימים של צעדים (כפולות של המחזור). ממצבים אחרים יכולים להיות מספר תתי גבולות, אם כי יתכן שיש מצבים התחלתיים שמהם כל תתי הגבולות שווים. למשל בדוגמא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(מהמצב הראשון מגיעים למצב 3 במספר זוגי של צעדים בסיכוי חצי ובמספר אי-זוגי בסיכוי חצי.)

ב. מצבים סופגים: אם מגיעים אליהם, אז לעולם לא עוזבים אותם.
או מצבים שמשום מצב לא ניתן להגיע אליהם.

שלומי