שאלות במבוא לתהליכים סטוכסטיים

1. תהי $X_1, X_2, X_3, \ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$.
תהי $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ סדרת משתנים מקריים המקיימים $Y_n = X_n X_{n+1}$.

(א) האם קיימים אינסוף X_n, המקיימים $X_n < \frac{1}{n}$?

(ב) האם קיימים אינסוף X_n, המקיימים $X_n < \frac{1}{n^2}$?

(ג) האם קיימים אינסוף Y_n, המקיימים $Y_n < \frac{1}{8n}$?

2. יהי $S_0, S_1, S_2, \ldots$ הילוך מקרי סימטרי. יהי A_n המאורע $S_{n(n-1)} = S_{(n+1)n}$. מהי ההסתברות שיתרחשו אינסוף מאורעות A_n ?

3. בשורה אינסופית $1,2,3,\ldots,8,9,10,11,\ldots,99,100,101,\ldots$ מוחקים כל ספרה בהסתברות p, באופן בלתי תלוי. מספר נקרא מחוק, אם כל ספרותיו מחוקות. האם יש אינסוף מספרים מחוקים ?

4. תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים חיוביים שווי התפלגות בעלי תוחלת סופית.
מהי ההסתברות שיתרחשו אינסוף מאורעות $X_n > n$?

5. תהיינה $X_1, X_2, \ldots$ ו $Y_1, Y_2, \ldots$ שתי סדרות של משתנים מקריים. נניח שמתקיימים שני תנאים:
(i) עבור כל $1 \le i < \infty$: X_i ו Y_i הם שווי התפלגות.
(ii) החוק החזק של המספרים הגדולים חל על הסדרה $X_1, X_2, \ldots$.
האם מצרוף שני תנאים אלה נובע שהחוק החזק של המספרים הגדולים חל גם על הסדרה $Y_1, Y_2, \ldots$?
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית.

6. תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים שווי התפלגות החסומים בערכם המוחלט על-ידי 1 ו $E(X_1) = 0$.
הוכיחו שעבור כל $\varepsilon > 0$ קיים קבוע C כך ש $\Pr[S_n / n > \varepsilon] < C(\varepsilon)/n^3$.
תנו חסם עליון ל $C(\varepsilon)$ שמתאים לכל תהליך סטוכסטי מסוג זה.

7. תהי $\{X_n\}$ סדרה בלתי תלויה של הטלות מטבע הוגן. הסדרה $\{Y_n\}$ מוגדרת לפי:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & if \quad X_n = X_{n+1} = H \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הוכיחו, תוך שימוש באי שיוויונים הקשורים במומנט רביעי, שהחוק החזק של המספרים הגדולים חל על הסדרה Y_n.

8. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים. מתקיים $P(X_1 = 0) = 1$, עבור $i \ge 2$ התפלגות X_i נקבעת על-פי הערכים שקבלו $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$. מתקיים $X_i = -\left(\sum_{k=1}^{i-1} X_k\right) + Y_i$ כאשר המשתנים Y_i הם בלתי תלויים ומקיימים $P(Y_i = 0) = 1 - \frac{2}{i}$, $P(Y_i = i) = P(Y_i = -i) = \frac{1}{i}$

(א) הראו שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.
(ב) הראו שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

9. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים שלגבהם מתקיים: אם $i = k^k$ עבור איזשהו k טבעי אז: $P[X_i = i] = P[X_i = -i] = \frac{1}{2k}$, $P[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{k}$
ועבור i שלא מקיים את הדרישה הזאת $P[X_i = 0] = 1$

(א) הראו שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.
(ב) הראו שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

10. לוירוס יש 5 צורות. בכל דור, בהסתברות 0.01 הוא בוחר צורה מחדש (באופן מקרי, מתוך ה-5).
(א) מצאו את שרשרת המעבר שמצביה הם חמשת הצורות.
(ב) מצאו (בקירוב או בדיוק) את ההסתברות שלאחר 10 דורות הוא בצורה המקורית.
(ג) מצאו (בקירוב או בדיוק) את ההסתברות שלאחר 1000 דורות הוא בצורה המקורית.

11. הוכיחו או הפריכו, על-יד מתן דוגמא נגדית, את כל אחת מהטענות הבאות.
(א) P,Q מטריצות מעבר של שרשרות מרקוב אי פריקות מאותו מימד, אז $\frac{1}{2}(P+Q)$ היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב אי פריקה.
(ב) P,Q מטריצות מעבר של שרשרות מרקוב פריקות מאותו מימד, אז $\frac{1}{2}(P+Q)$ היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב פריקה.

12. נתונה שרשרת מרקוב בעלת שני מצבים $\{0,1\}$, יהי τ_i $(i=0,1)$ הזמן עד הביקור הראשון במצב i . זאת אומרת $\tau_i=\min\{n: n\ge 1, X_n=i\}$.
בטאו באמצעות $P_{01}=\alpha$, $P_{10}=\beta$ את:
(א) $P_0(\tau_0=n)\equiv P(\tau_0=n \mid X_0=0)$.
(ב) $P_0(\tau_1=n)\equiv P(\tau_1=n \mid X_0=0)$.

13. הוכיחו שבשרשרת מרקוב סופית קיים לפחות מצב נשנה אחד.

14. יהי $p_{i,i+1}=p>\frac{1}{2}$ ו $p_{i,i-1}=1-p$ לכל $i=0,+1,-1,+2,-2,...$.
(א) חשבו את $P_{i,i}^{(2n)}$.
(ב) הוכיחו שהשרשרת חולפת.

15. לקוחות מגיעים לתחנת שרות. לגבי כל יחידת זמן, לא מגיע אף לקוח בסכוי 0.25 , מגיע לקוח אחד בסכוי 0.5 או מגיעים שני לקוחות בסכוי 0.25 . לקוחות המגיעים כאשר יש בתחנה שלושה לקוחות עוזבים את התחנה. שרות של לקוח אחד לוקח יחידת זמן אחת ומתחיל בכל תקופה.
הסתכלו על מצבי השרשרת שהם מספר הלקוחות בתחילת כל תקופה.
(א) מצאו את מטריצת המעבר של השרשרת.
(ב) מצאו את ההסתברות הסטציונרית של המצב אפס.

16. נתונים שני כדים שבכל אחד מהם יש N כדורים. מתוך 2N הכדורים N כדורים הם לבנים ו N כדורים הם שחורים. בכל שלב מוגרל אקראית כדור מכל כד ומעבר לכד האחר. הסתכלו על שרשרת מרקוב שמצביה הם מספר הכדורים הלבנים בכד הראשון.
(א) רשמו את מטריצת המעבר של השרשרת.
(ב) מיינו את מצבי השרשרת.
(ג) עבור N =3 , חשבו את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.

17. נתונה מטריצת מעבר מסדר 7×7 :

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מיינו את מצבי השרשרת.
(ב) מצאו וקטור הסתברויות סטציונרי.

18. הוכיחו שבשרשרת מרקוב סופית קיים מצב נשנה חיובי לפחות אחד.

19. הוכיחו שבשרשרת מרקוב סופית כל מצב נשנה הוא נשנה חיובי.

20. נתונה שרשרת מרקוב
$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

(א) מצאו $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ לכל i,j .

(ב) מצאו את תוחלת הזמן עד הקלטות במחלקה של מצבים נשנים כאשר נמצאים במצבים החולפים השונים.

21. נתונה שרשרת מרקוב
$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.2 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(א) מצאו את ההסתברויות הגבוליות $\lim_{n\to\infty} P_{3,4}^{(n)}$, $\lim_{n\to\infty} P_{3,6}^{(n)}$.

(ב) מצאו את תוחלת הזמן עד הקלטות במצבים נשנים כאשר נמצאים במצבים 3 ו 4 .

22. נתונה שרשרת מרקוב $\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. מצאו את כל הוקטורים הסטציונרים שלה.

23. לגבי שרשרת מרקוב משאלה 17 , מצאו את את הגבולות $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(2n)}$ לכל i,j .

24. נתונה מטריצה מרקובית
$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\begin{bmatrix}0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(א) נתחו את המטריצה מבחינת סווג כל מצב, פריקות ומחזוריות.

(ב) מצאו את כל ההתפלגויות הסטציונריות.

(ג) השרשרת נמצאת בזמן אפס במצב 3 . חשבו בקירוב טוב את ההסתברות שהשרשרת נמצאת במצב 7 בזמן 10^6 , בזמן 10^6+1 , ובשני זמנים אלה.

25. נתונה מטריצה מרקובית
$$\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$

הראו שההסתברות לא לבקר אף פעם במצב 1 עד שלב m , דועכת מעריכית באשר $m\to\infty$.

26. (א) הראו שלגבי כל מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים מתקיים שהסכוי לא להגיע אליו עד שלב m שואף לאפס מעריכית, זאת אומרת שקיים פרמטר $0 \le a < 1$ שהסתברות זאת קטנה מ a^m לכל $m > M$, M סופי וקבוע.
(ב) הראו שבסעיף א' לא ניתן לוותר על סופיות מספר המצבים.

27. יהי Y_n סכום n הטלות של קוביה הוגנת.
מצאו $\lim_{n\to\infty} \Pr\{Y_n \quad is \quad a \quad multiple \quad of \quad 13\}$

28. הסתכלו על שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר
$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_1 \\ & \cdots & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ p_n & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

שבה $p_1 + P_2 + \cdots + p_n = 1$, $p_2 > 0$, $0 < p_1 < 1$
מצאו $\lim_{k\to\infty} P_{i,j}^{(k)}$.

29. שאלה זו עוסקת בשרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים.
בזמן אפס נמצאים במצב 0 . בכל שלב מטילים קוביה הוגנת ומתקדמים מספר צעדים ששווה לתוצאת הטלה זו. הניחו שההטלות השונות הן בלתי תלויות הדדית.
(א) מיינו את מצבי השרשרת.
(ב) מצאו בקירוב את ההסתברות שבאיזשהו שלב נבקר במצבים 1001 ו 3002 אך לא נבקר בשום שלב במצבים 3000 ו 3001 .

30. תהי P שרשרת מעבר על המצבים $\{0,1,2,\cdots\}$.
יהי $p_{0,k} = \frac{1}{(k+1)k}$ עבור $k = 1,2,3,\cdots$ ו $P_{k,k-1} = 1$.
(א) מיינו את מצבי השרשרת.
(ב) חשבו $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)}$.

31. תהי P שרשרת מעבר על המצבים $\{0,1,2,\cdots\}$.
יהי $P_{0,k} = \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ עבור $k = 0,1,2,3,\cdots$ ו $p_{k+1,k} = 1$
(א) מיינו את מצבי השרשרת.
(ב) חשבו את ההסתברות הסטציונרית של המצב אפס.

32. תהי P שרשרת מעבר על המצבים $\{0,1,2,\cdots\}$.
יהי $P_{k,k+1} = p = 1 - P_{k,k-1}$ עבור $k = 1,2,3$ ו $P_{0,1} = 1$ כאשר $0 < p < \frac{1}{2}$.
(א) מיינו את מצבי השרשרת.
(ב) חשבו את ההסתברויות הסטציונרית של המצבים 0 ו 1 .

33. תהי P שרשרת מעבר על המצבים $\{0,1,2,\cdots\}$.
$P_{n,n+1} = p$, $P_{n,n-1} = 1 - p$ לכל $n = 1,2,\cdots$ ו $P_{0,1} = p$, $P_{0,0} = 1 - p$.
עבור $p < \frac{1}{2}$ חשבו את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.

34. הוכיחו שאם P היא שרשרת מעבר שבה המצב הראשון הוא המצב הנשנה היחיד אז הוקטור הסטציונרי היחיד הוא $(1,0,0,\cdots,0)$

35. תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:
$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$ לכל $i \geq 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$
שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$.

(א) הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו n טבעי.

(ב) הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$ אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

(ג) הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ 0.5 לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

(ד) הראו שהמנה 0.5 תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

(ה) הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

(ו) הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

36. יהי $\{X_n\}$, $n = 0,1,2,\cdots$ תהליך הסתעפות. יהי $Y_n = X_{kn}$.

(א) הוכיחו ש $\{Y_n\}$, $n = 0,1,2,\cdots$ הוא תהליך הסתעפות.

(ב) נניח שבתהליך $\{X_n\}$ מספר הלידות של פרט מתפלג גיאומטרית עם פרמטר 0.5 , מצאו איזה תהליך הסתעפות הוא $\{Y_n\}$ עבור $k = 3$.

37. נניח שהתפלגות מספר הלידות של כל פרט מקיימת:

$$P(Z = 0) = P(Z = 1) = P(Z = 2) = P(Z = 3) = 1/4$$

מצאו את ההסתברות להכחדות.

38. נניח שמספר הלידות של כל פרט הוא בעל תוחלת $m < \frac{1}{2}$. מצאו $E\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n\right)$.

39. צפור מטילה Z ביצים, כאשר ל Z יש התפלגות פואסונית בעלת פרמטר λ . כל ביצה בוקעת בסכוי p באופן בלתי תלוי בביצים אחרות. חשבו את $E(X_n)$ ואת $Var(X_n)$.

40. מספר הלקוחות X שמגיעים ביחידת זמן הוא בעל ההתפלגות:

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} \ , \ P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

לגבי שרשרת מרקוב שבה המצבים הם מספרי הלקוחות שבתור, (שירות של לקוח לוקח יחידת זמן אחת) חשבו את ההסתברויות הסטציונריות של המצבים $0,1,2$.

41. מספר הלקוחות X המגיעים ביחידת זמן הוא בעל ההתפלגות:

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

לגבי שרשרת מרקוב שבה המצבים הם מספרי הלקוחות שבתור, (שירות של לקוח לוקח יחידת זמן אחת) חשבו את ההסתברות לא לחזור ל 0 לאחר שמתחילים ב 0.

42. יהי $X(t)$ תהליך פואסון בעל פרמטר קבוע λ שבו המשתנה t_n הוא זמן הקפיצה ה- n .

(א) בהינתן $X(T) = 1$, מצאו את ההתפלגות של t_1 .

(ב) בהינתן $X(T) = n$, מצאו את ההתפלגות המשותפת של $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

(ג) בהינתן $X(T) = n$, מצאו את ההתפלגות של $X(t)$ עבור $0 < t < T$.

43. נניח ש $X(t)$ בעל התפלגות פואסונית בעלת פרמטר $\Lambda(t) = t^2$. חשבו $P[X(2) - X(1) > 1]$

44. שאלה זו עוסקת בתהליך לידה ומוות.
נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $I=\{0,1,2,\cdots\}$ ויוצר אינפיניטיסימלי A הנתון על-ידי:

קצבי לידה: $a_{i,i+1}=\lambda_i>0$

קצבי מוות: $a_{i,i-1}=\mu_i>0 \qquad i>0$

$a_{i,j}=0 \qquad |i-j|>1$

(א) מה הן הסתברויות המעבר $Q=\{q_{i,j}\}$ בזמני הלידה ומוות.
(ב) מה הן התוחלות של פרקי השהיה הרצופה במצבים השונים.

45. לתחנה עם n שרתים בלתי תלויים ובעלי זמן שרות מעריכי μ כל אחד, מגיע זרם צרכנים פואסוני בעל עוצמה λ. כאשר צרכן מגיע וכל העמדות תפוסות הוא עוזב את התחנה. יהי $X(t)$ מספר הצרכנים בזמן t.
(א) מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של $X(t)$ ואת וקטור ההסתברויות הסטציונרי.
(ב) הניחו ש $n=\infty$. מהו במקרה זה הוקטור הסטציונרי ?

46. יהי $$P=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & \alpha\end{pmatrix}$$

הוכיחו ש P יכולה להיות משוכנת בפונקצית מעבר מרקובית $P(t)$ כך ש: $P(1)=P$ אם ורק אם $\alpha>\frac{1}{2}$. במקרה זה, חשבו את $P(t)$ כפונקציה של α והוכיחו את יחידותה.

47. נתון תהליך מרקוב על שלושה מצבים בעל יוצר אינפיניטיסימלי: $$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2}\\ 2 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

(א) מהי מטריצת המעבר Q בזמני הקפיצות.
(ב) מהי פרופורצית הזמן האסימפטוטית שהתהליך נמצא בכל מצב.
(ג) מצאו תהליך פואסון $N=\{N(t)\}$ (מצאו את הקצב שלו) ומטריצת מעבר M , כך שהסתברויות המעבר של התהליך יקימו $$P(t)=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}M^n$$

48. בהינתן שרשרת מרקוב בזמן בדיד $Y=\{Y_n\}_0^\infty$ בעלת מטריצת מעבר: $$M=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

יהי $N=\{N(t) \ : \ t\geq 0\}$ תהליך פואסון בלתי תלוי ב Y , בעל קצב $\lambda=2$ מאורעות ליחידת זמן. הסתכלו על התהליך $X=\{X(t) \ : \ t\geq 0\}$ המוגדר על-ידי: $X(t)\equiv Y_{N(t)}$.
(א) בטאו את הסתברויות המעבר $P(t)$ של X כטור של מטריצות.
(ב) חשבו את מטריצת המעבר Q בזמני הקפיצות של X.
(ג) מהן התוחלות של פרקי השהיה הרצופה במצבים השונים ?
(ד) חשבו את $P(\infty)\equiv\lim_{t\to\infty}P(t)$.

49. נתון יוצר אינפיניטיסימלי $$\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$ של מטריצת מעבר.

מצאו $p_{i,j}(t)$ עבור $i,j=1,2,3$. מצאו גם את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.