32.א. השרשרת לא פריקה מכיוון שמכל מצב אפשר להגיע לכל מצב אחר במסלול מונוטוני.
המחזור ≤ 2 מכיוון שממצב זוגי בהכרח עוברים למצב אי זוגי ולהפך. המחזור ≥ 2 מכיוון שעבור כל i אפשר $i \to i+1 \to i$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

נבדוק נשנות של מצב 0: יהי a הסכוי לחזור אי פעם ל-0 לאחר שעוברים אותו ומגיעים ל-1. סכוי החזרה מ-2 ל-0 הם a^2 מכיוון שצריך לחזור ל-1 ומ-1 ל-0.

$$a=q+p\cdot a^2 \longrightarrow a_1=\frac{q}{p}\ ,\ a_2=1$$

מכיוון ש-$1<\frac{q}{p}$ זה אינו פתרון מתאים, לכן סכוי החזרה הם 1, לכן 0 מצב נשנה ומכיוון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים נשנים.

ב. נחשב את E_0 - תוחלת זמן החזרה ל-0.
נשתמש ב-G_1 תוחלת זמן החזרה מ-1 ל-0. $E_0=G_1+1$

$$G_1=q\cdot 1+p(1+2\cdot G_1) \longrightarrow G_1=1+2p\cdot G_1 \longrightarrow G_1=\frac{1}{1-2p}$$

$$\longrightarrow E_0=1+\frac{1}{1-2p}=\frac{2(1-p)}{1-2p} \longrightarrow \pi_0=\frac{1}{E_0}=\frac{1-2p}{2(1-p)}$$

ומכיוון ש-$E_0<\infty$ אז המצב נשנה חיובי ומכיוון שנשנות חיובית היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים נשנים חיובי.
נחשב את E_1 תוחלת זמן חזרה ל-1:

$$E_1=q\cdot 2+p(1+G_1)=2(1-p)+2\cdot\frac{(1-p)\cdot p}{1-2p}=\frac{2(1-p)(1-2p+p)}{1-2p}=$$

$$=\frac{2(1-p)^2}{1-2p} \longrightarrow \pi_1=\frac{1-2p}{2(1-p)^2}$$

שלומי

33. השרשרת:

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots & & \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

לשרשרת קיים וקטור סטציונרי אם היא נשנית חיובית.
נבדוק האם 0 מצב נשנה חיובי:

$$E_0 = (1-p)\cdot 1 + p\cdot E_{1,0}$$

$$E_{1,0} = (1-p)\cdot 1 + p(2\cdot E_{1,0} + 1)$$

$$E_{1,0} = 1-p+2\cdot p\cdot E_{1,0} + p \longrightarrow E_{1,0} = \frac{1}{1-2p}$$

$$p < 0.5 \longrightarrow E_{1,0} < \infty \longrightarrow E_0 < \infty$$

לכן מצב 0 נשנה חיובי ומכיון שהשרשרת לא פריקה אז היא נשנית חיובית וקיים וקטור סטציונרי.

חישוב הוקטור הסטציונרי:

$$\begin{cases} \pi_0 = (1-p)\cdot \pi_0 + (1-p)\cdot \pi_1 & \\ \pi_i = p\cdot \pi_{i-1} + (1-p)\cdot \pi_{i+1} & ;\ \forall\ i \geq 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow p\cdot \pi_0 = (1-p)\cdot \pi_1 \ ;\ \forall\ i\geq 1:\ \pi_{i+1} = \frac{p}{1-p}\cdot \pi_i$$

$$\longrightarrow \pi_0 \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^t = 1 \longrightarrow \pi_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{p}{1-p}} = 1 \longrightarrow \pi_0 = \frac{1-2p}{1-p}$$

$$\pi_i = \frac{1-2p}{1-p}\cdot\left(\frac{p}{1-p}\right)^i$$

סלומי