פתרונות במבוא לתהליכים סטוכסטיים

2. עבור כל n נגדיר את המאורע A_n כ: $S_{n(n-1)}=S_{n(n+1)}$. A_n

$1\le n<\infty$ סדרת מאורעות בת"ל. יהי $X=[x_1,x_2,\dots\dots]$ המשתנה המקרי המוגדר

$X_i=\begin{cases}1 & A_i\\ 0 & A_i^c\end{cases}$, אם $S_{n(n-1)}=S_{n(n+1)}$ אז מתוך $2n$ מהלכים בין $n(n-1)$

ל $n(n+1)$, n הם ימינה ו n שמאלה.

$$p(A_n)=\binom{2n}{n}\cdot 0.5^{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot 0.5^{2n}\overset{*}{\sim}\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}}\cdot 0.5^{2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

(* עפ"י נוסחת סטירלינג $n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$, כאשר המשמעות של $\sim$ היא שכאשר $n\to\infty$, היחס בין שני האגפים שואף ל 1, או בגרסה שגורעת מכך ומעניינת אותנו כאן קיימים קבועים $0<c_1,c_2<\infty$ המקיימים שעבור כל n אגף ימין לא גדול מאגף שמאל ביותר מפי c_1 ואגף שמאל לא גדול מאגף ימין ביותר מפי c_2)

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתבדר עבור $\alpha\le 1$, לכן במקרה שלנו $\sum p(A_n)=\infty$ כאשר A_n בת"ל, לכן לפי למת בורל קנטלי $p(\overline{\lim}A_n)=1$ משמעותו $p(\sum X_i=\infty)=1$

---

4. $A_n=(X_n>n)$. נגדיר המ"מ Y: $k<X_1\le k+1 \iff Y=k+1$, Y מקבל את

הערכים $k=1,2,3,\dots$ $\quad Y\le X_1+1 \longrightarrow E(Y)\le E(X_1+1)=E(X_1)+1$

$$1+\sum p(A_n)=1+\sum_{i=1}^{\infty}p(X_i>i)=1+\sum_{i=1}^{\infty}p(X_1>i)=\sum_{i=0}^{\infty}p(X_1>i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p(Y\ge i)=E(Y)<\infty\longrightarrow\sum p(A_n)<\infty$$

לכן לפי הלמה $p(\overline{\lim}A_n)=0$

שלומי