<u>פתרון לבחינה מ 21/02/16</u>

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	ב	ב	ה	ב	א	ה	ג	ד	ג	ג	א	ד	א	ג	ב

<u>הסברים קצרים</u>

<u>שאלה 1</u>

$$P(S_8 > S_6) = 1 - P(X_7 = 0, X_8 = 0) = 1 - P(X_7 = 0)P(X_8 = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

<u>שאלה 2</u>

<u>פתרון בדרך ראשונה</u>

$$E(T_2) = E(Z_1) + E(Z_2) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$E^2(T_2) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}$$

$$P(T_2 = 1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$$

$$P(T_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

$$E(T_2{}^2) = \frac{12}{27} \cdot 1^2 + \frac{6}{27} \cdot 2^2 = \frac{36}{27}$$

$$V(T_2) = \frac{36}{27} - \frac{64}{81} = \frac{44}{81}$$

<u>פתרון בדרך שניה</u>

$$V(T_2) = V(Z_1) + V(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2)$$

Z_1 ו Z_2 הם אינדיקטורים. השונות של אינדיקטור שווה להסתברות שלו כפול ההסתברות של המשלים שלו.

$$V(Z_1) = V(Z_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{81}$$

כדי ששני האינדיקטורים יתרחשו, צריך שפעמיים תתחלף התוצאה.

$$Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{2}{81}$$

שאלה 3

סדרת המשתנים $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות, בעלי שונות סופית. לכן, חל על הסדרה החוק החלש.

לגבי סדרת המשתנים $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$, המשתנים במקומות האי זוגיים מהווים סדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות, בעלי שונות סופית. גם סדרת המשתנים במקומות הזוגיים מהווים סדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות, בעלי שונות סופית. לכן, על כל אחת מהן חל החוק החלש. כאשר סוכמים מספר גדל של משתנים, ההסתברות שממוצע המשתנים במקומות האי זוגיים, יהיה רחוק מהתוחלת ביותר מקבוע חיובי נתון במקום מסוים שואפת לאפס. אותו דבר חל גם על המשתנים שבמקומות הזוגיים. הממוצע הכללי הוא שקלול של הממוצעים של המשתנים שבמקומות האי זוגיים ואלה שבמקומות הזוגיים. לכן ההסתברות שהוא יהיה רחוק מהתוחלת ביותר מקבוע חיובי נתון, שואפת לאפס. לכן, על הסדרה חל החוק החלש.

שאלה 4

הטלה אחת היא בטוח הצלחה. כל אחת מהאחרות היא הצלחה בסיכוי $\frac{1}{3}$.

לכן התוחלת שווה ל $1+4\cdot\frac{1}{3}$.

שאלה 5

אם מתקיים $(T_3=1)$, אז ברור שבהטלות הראשונה והרביעית, התוצאות הן שונות. משיקולי סימטריה, הראשונה היא הצלחה בסיכוי $\frac{1}{2}$.

שאלה 6

אם מתקיים $(T_3=1)$, אז בארבע ההטלות הראשונות התקבלו התוצאות 0111 או 1110 או 0001 או 1000 או 1100 או 0011.

מבין תוצאות אלה מתקיים $(X_2=1)$ ב 0111 , 1110 , 1100 .

ההסתברות המותנה לקבלת התוצאות האלה היא:

$$\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}^2}=\frac{2}{7}$$

שאלה 7

אחרי הצעד הראשון, בהכרח מקבלים תוצאה חדשה. אחר-כך מחכים זמן המתפלג $G\left(\frac{5}{6}\right)$ עד קבלת תוצא חדשה. לאחר קבלת שתי תוצאות מחכים זמן המתפלג $G\left(\frac{4}{6}\right)$ עד קבלת תוצאה שלישית. התוחלת הכוללת היא $1+\frac{1}{5/6}+\frac{1}{4/6}$

שאלה 8

נראה שעבור כל $n \geq 2$, יש לזוג $\left(X_1, X_n\right)$ אותה התפלגות משותפת.
ההוכחה היא באינדוקציה.
אם אחרי שלב 1, יש k כדורים כחולים ו $4-k$ כדורים ירוקים, אז בשלב 2 הסיכוי לכחול הוא $\frac{k}{4}$. נניח שעבור כל $2 \leq i \leq n-1$, הסיכוי שהוא כחול הוא $\frac{k}{4}$, אז זהו גם הסיכוי בשלב ה- n, כי בשלב n, מוציאים כדור שהיה בכד לאחר שלב 1 או כדור שהוכנס יותר מאוחר. לפי הנחת האינדוקציה, גם כדור שהוכנס אחר-כך הוא כחול בסיכוי $\frac{k}{4}$.

שאלה 9

$$P\left(X_1 > 1, X_2 > 1\right) = P\left(X_1 > 1\right)P\left(X_2 > 1\right) = e^{-\ln(2)}e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

שאלה 10

עבור כל ערכים אפשריים של המשתנים הקודמים, דרוש המאורע $\left(X_7 > 1\right)$. לכן הסתברות היא הסתברות המאורע $\left(X_7 > 1\right)$ ללא צורך בכל הנחה.

הערה

הסתברות המאורע $\left(X_7 > 1\right)$ יכולה להיות תלויה בערכם של ששת המשתנים הראשונים. אבל, מבוקשת ההסתברות הלא מותנה של המאורע $\left(X_7 > 1\right)$.

שאלה 11

מכיון שהמשתנים הם משתנים רציפים, אז עבור כל ערך שמקבל משתנה אחד, ההסתברות שהאחר "יחקה" אותו היא אפס. שני המשתנים מקבלים את אותו ערך בהסתברות אפס. משיקולי סימטריה, ההסתברות שהראשון גדול מהשני שווה להסתברות שהשני גדול מהראשון. עבור זוג משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות מתקיים

$$V\left(X_1 + X_2\right) = V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right) = 2V\left(X_1\right)$$

שאלה 12

המשתנה Z_1 יכול לקבל את הערכים 0 או 1.

$$P(Z_1 = 1) = P(X_1 \le 1) = 1 - e^{-\ln(2)} = 0.5$$

שאלה 13

$$V(Z_1 Z_2 + 3) = V(Z_1 Z_2)$$

המשתנה $Z_1 Z_2$ הוא אינדיקטור בעל הסתברות $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

לכן השונות שלו היא $0.25 \cdot 0.75$.

שאלה 14

מכיון שעבור כל i מתקיים $E(X_i) = p$, אז תוחלת כל אומד היא p.

המשקל של X_1 הוא חצי בכל אחד מהאומדים. לכן אם למשל יתקיים $(X_1 = 0)$, אז לא נצפה שהממוצע יהיה קרוב ל p.

$$V\left(\frac{nX_1 + \sum_{i=0}^{n} X_i}{2n}\right) = V\left(\frac{(n+1)X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i}{2n}\right) = \frac{(n+1)^2 V(X_1) + (n-1)V(X_1)}{(2n)^2}$$

סדרה זו אינה קבועה וגם לא שואפת לאפס.

שאלה 15

מספר האפסים שווה למינמום בין מספר גורמי ה-5 ומספר גורמי ה-2. ברור שבמכפלה של גלן הודל יש יותר גורמי 2 מאשר גורמי 5. לכן מספר האפסים אצל גלן הודל שווה למספר הטבעיים מבין $\{5,10,15,20\}$ שהוא יבחר. לגבי גארי מאבוט, יתכן שיהיו לו פחות גורמי 2, ולכן מספר האפסים אינו שווה בהכרח למספר גורמי ה-5.

שאלה 16

אם לדלי קינג בוחר את המספר 25, אז יש בזה תרומה של שני גורמי 5. לכן אין כאן ספירה של בחירת מיוחדים מתוך אוכלוסיה של 6 מיוחדים ו 24 אחרים.

שלומי