הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

8/7/2010, מועד א' סימסטר ב' תש"ע

שירי אלון עירון

הנחיות:

- **משך הבחינה: 3 שעות.**
- ניתן להשתמש במחשבון (למרות שלא נחוץ!).
- דף נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית מצורפים לבחינה.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן. הנקודות בבחינה מסתכמות ל- 115 (הציון המקסימלי שיינתן הוא 100).
- **יש לענות על השאלות במחברת הבחינה ולא בטופס!**
- **בהצלחה!!**

שאלה 1 (28 נקודות: 7 נקודות לכל סעיף)

אורך חיי רכיב בחודשים מתפלג לפי פונקצית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^4}, x\ge 1\\ 0, otherwise\end{cases}$

א. מצאו את ערכו של c, וחשבו תוחלת ושונות של אורך חיי רכיב.

ב. בקרת האיכות של המפעל בודקת רכיבים בזה אחר זה ע"י הפעלתם ל- 1.1 חודשים (הרכיבים ב"ת). רכיב שאינו כושל בזמן זה נחשב תקין. מה תוחלת מספר הבדיקות עד שתתמלא אריזה של 10 רכיבים תקינים?

ג. במפעל 100 רכיבים ב"ת. העריכו את ההסתברות שלאחר חודשיים, 15 רכיבים לכל היותר נותרו פועלים.

ד. במפעל החלו לייצר רכיבים בשיטה חדשה. ידוע כי אורך חיי הרכיבים המיוצרים בשיטה החדשה מתפלג לפי פונקצית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha-1}{x^\alpha}, x\ge 1\\ 0, otherwise\end{cases}$

עבור פרמטר $\alpha>1$ לא ידוע. ברצונכם לאמוד את α. ידועים לכם n אורכי חיים של רכיבים ב"ת שנמדדו, אותם נסמן ב- $y_1,\dots,y_n$. השתמשו בשיטה שלמדנו בכיתה והציעו אומד ל- α.

שאלה 2 (40 נקודות: 6 נקודות לסעיף א', 8 נקודות לסעיפים ב',ג', 9 נקודות לסעיפים ד',ה')

התפרצויות הר געש באיסלנד מתרחשות לפי תהליך פואסון עם קצב של התפרצות אחת בשלושה חודשים.

א. ידוע שבחצי השנה האחרונה התרחשו 5 התפרצויות. מה ההסתברות שבחצי השנה הבאה יתרחשו לכל היותר שתי התפרצויות?

ב. הניחו שלפני חצי שנה התחילו לספור את מספר ההתפרצויות, ומאז התרחשה התפרצות אחת בדיוק. נסמן ב- X את מספר ההתפרצויות בחצי השנה הזו, ב- T את הזמן בחודשים מתחילת הספירה ועד ההתפרצות וב- A את המאורע $\{X=1\}$. חשבו את ההסתברות $P(T\le t\mid X=1)$ עבור $0\le t\le 6$. הסיקו את התפלגות $T\mid A$ (זהו אותה).

ג. הר געש אחר באיסלנד, ב"ת בראשון, מתפרץ לפי תהליך פואסון עם קצב של שלוש התפרצויות בארבעה חודשים. יהא W סך כל מספר ההתפרצויות של שני ההרים בשנה. חשבו $E(e^{tW})$ והסיקו את התפלגות W.

ד. יהיו T_1 הזמן בחודשים עד התפרצות ההר הראשון, T_2 הזמן בחודשים עד התפרצות ההר השני. מצאו צפיפות משותפת של (T_1,T_2) וחשבו את ההסתברות שההר הראשון יתפרץ קודם.

ה. נסמן ב- M את הזמן בחודשים עד להתפרצות הראשונה (של אחד ההרים). בטאו את M באמצעות T_1,T_2 ומצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת שלו. איזו התפלגות קיבלתם?

שאלה 3 (20 נקודות: 6 נקודות לסעיפים א',ב', 8 נקודות לסעיף ג')

בחפיסת קלפים יש קלפים הממוספרים מ- 1 עד 13, ולכל מספר 4 סמלים - לב, עלה, יהלום ותלתן (בסך הכל 52 קלפים).

א. בוחרים מהחפיסה חמישה קלפים ללא החזרה.

i) מה הסיכוי לשני זוגות שונים בדיוק (למשל – 3,3,9,9,5)?

ii) מה הסיכוי ל"פול האוס" (זוג ושלישיה, למשל – 1,1,8,8,8)?

ב. שוב בוחרים מהחפיסה חמישה קלפים ללא החזרה. אם ידוע ששניים בדיוק מבין חמשת הקלפים שנבחרו הם עשיריות, מה הסיכוי לשני זוגות שונים בדיוק?

ג. מסדרים את כל הקלפים בשורה. נאמר שהתקבל *רצף מושלם של המספר i* אם כל ארבעת הקלפים עם המספר i צמודים זה לזה. מה תוחלת מספר הרצפים המושלמים (של כל המספרים) שהתקבלו?

שאלה 4 (27 נקודות: 6 נקודות לסעיפים א',ב',ג',9 נקודות לסעיף ד')

יהא X משתנה מקרי המתפלג $N(\mu,\sigma^2)$.

א. מצאו את הפרמטרים μ,σ^2 אם נתון - $P(X>90)=\Phi(1)$, $P(X<80)=1-\Phi(2)$.

ב. חשבו $E[X(5+X)]$.

ג. יהיה Y משתנה מקרי, ב"ת ב- X ומתפלג כמוהו. איך מתפלג הסכום X+Y? איך מתפלג ההפרש X-Y?

ד. מטילים מטבע הוגן, באופן ב"ת ב- (X,Y). יהא W המשתנה המקרי $W=\begin{cases}X, & \text{עץ}\\ Y, & \text{פלי}\end{cases}$ (W מקבל את הערך של X אם יוצא "עץ", ואת הערך של Y אם יוצא "פלי"). נסמן ב- F את פונקצית ההתפלגות המצטברת של X ושל Y.

i) בטאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של W בעזרת F.

ii) האם W ו- X תלויים? הראו במדויק.

	שם ההתפ'	סימון	ערכים	פ.הסתברות (צפיפות)	פ. התפלגות מצטברת	תוחלת	שונות	פונק' יוצרת מומנטים
בדיד	אחידה בדידה	X~U{1,...,N}	1,2,...,N	$\frac{1}{N}$	לפי הגדרה	$\frac{1+N}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{e^t(1-e^{Nt})}{N(1-e^t)}$
	בינומית	X~Bin(n,p)	1,...,n	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	לפי הגדרה	np	np(1-p)	$(1-p+pe^t)^n$
	גיאומטרית	X~Geom(p)	1,2,...	$p(1-p)^{x-1}$	$1-(1-p)^x$	1/p	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
	בינומית שלילית	X~NB(n,p)	n,n+1,...	$\binom{x-1}{n-1}p^n(1-p)^{x-n}$	לפי הגדרה	n/p	$\frac{(1-p)n}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$
	היפר-גיאומטרית	X~HG(N,D,n)	Max(0, n-(N-D)), ..., min(D,n)	$\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	לפי הגדרה	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	ארוך. לא תזדקקו לזה.
	פואסונית	X~Pois(λ)	0,1,...	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	לפי הגדרה	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
רציף	אחידה רציפה	X~U$_c$(a,b)	(a,b)	$\frac{1}{b-a}, I(a \le x \le b)$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
	מעריכית	X~exp(λ)	$(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}I(x>0)$	$(1-e^{-\lambda x})I(x>0)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
	נורמלית	X~N(μ,σ^2)	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ לפי הטבלה הנורמלית	μ	σ^2	$e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

התפלגות נורמלית דו-מימדית = דו-נורמלית:

נאמר שהווקטור המקרי (X,Y) מתפלג לפי התפלגות דו-נורמלית, אם התפלגותו נתונה ע"י הצפיפות המשותפת

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right),$$

כאשר $X \sim N(\mu_x, \sigma_x{}^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, $\rho(X,Y) = \rho$, וההתפלגויות המותנות הן –

$$Y|X = x \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho(x-\mu_X),\, (1-\rho^2)\sigma_Y^2\right).$$

ובאופן אנלוגי עבור X בהנתן Y=y.

רגרסיה

קו הריבועים הפחותים, עבור תצפיות n $(x_i, y_i), i=1,\ldots,n$, נתון ע"י:

$\hat{y} = \bar{y} + \hat{\beta}(x-\bar{x})$, עבור $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, כאשר $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ הם הממוצעים המדגמיים.