

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ט,
מועד הבחינה: 22.2.09
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

_____ תעודת זהות:

_____ מספר מחברת:

לשימוש הבודקים:

_____ 1

_____ 2

_____ 3

_____ 4

_____ סה"כ

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ט,
מועד הבחינה: 22.2.09
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - ארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- הניקוד לכל סעיף, רשום בתחילת כל שאלה. סך הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימאלי האפשרי הוא 100.
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.

בהצלחה !

שאלה 1 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

ביום ההולדת של תמר השתתפו 15 בנות (כולל תמר) ו-17 בנים. אמא של תמר קנתה 20 סרגלים כחולים ו-18 סרגלים ורודים ושמה אותם בשקיות יום-ההולדת. כל ילד קבל שקית באקראי. גאיה היתה הראשונה שקבלה שקית ויותר השני.

א. מה הסיכוי שמבין גאיה ויותר לפחות אחד קיבל סרגל ורוד?

$$1 - \frac{20 \cdot 19}{(20+18)(19+18)} = \dots$$

$$1 - \frac{\binom{20}{2}}{\binom{20+18}{2}}$$

i/c

(כחולים הוא ששניהם נקחרו סרגלים כחולים.)
 הערה: ניתן גם לשק ישרות את הסתברות האירוע.

ב. נגדיר את המאורעות $A = \{\text{גאיה קבל סרגל ורוד}\}$ ו- $B = \{\text{יותר קיבל סרגל כחול}\}$.
 סמנו את האפשרות הנכונה:
 a. A ו- B זרים ותלויים.

b. A ו- B זרים והינם ב"ת.

c. A ו- B אינם זרים ותלויים.

d. A ו- B אינם זרים והינם ב"ת.

הם אינם זרים כי יתכן שגם גאיה יקרא ורוד
 וגם יותר יקרא כחול. הם תלויים כי אם גאיה
 מקרא ורוד אז גאיה יקרא כחול.

ג. הבנים מאושרים אם קבלו סרגל כחול והבנות אם קבלו סרגל ורוד. מהי תוחלת מספר הילדים המאושרים?

כאן קיבלו מאושרים גם כן וכל קיבלו מאושר
 גם כן, תוחלת מספר האושרים שיהיה
 מספר הילדים המאושרים שיהיה

$$15 \cdot \frac{18}{20+18} + 17 \cdot \frac{20}{20+18}$$

ד. ידוע שגאיה קבלה סרגל ורוד. מה הסיכוי שכל הבנות קבלו סרגל ורוד? אין צורך להגיע למספר סופי.

A - גאיה קבלה סרגל ורוד
 B - כל הילדות קבלו סרגל ורוד

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{18}{15} / \binom{38}{15}}{\frac{18}{38}} = \dots$$

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

שאלה 2 (28 נקודות - כל סעיף 7 נקודות)

גלעד נוסע לעבודה ברכבת של 8:00 מחיפה לתל-אביב. יהי X זמן האיחור של הרכבת (בדקות). X מתפלג לפי ההתפלגות המעריכית. ב- 95% מהימים זמן האיחור קטן מ-10 דקות.

א. הרכבת מפצה נוסעים אם היא יוצאת מהתחנה באיחור של 15 דקות ומעלה. באיזה אחוז מהבקרים תפצה הרכבת את הנוסעים?

לשג'י משתנה מעריכי $P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$ מתקיים

עבור $a \geq 0$, כאן $1 - e^{-\lambda \cdot 10} = 0.95$

נראה $e^{-10\lambda} = 0.05$, מתקיים $P(X < 15) = 1 - e^{-15\lambda}$

כן, $e^{-15\lambda} = (e^{-10\lambda})^{\frac{15}{10}} = 0.05^{1.5} = \dots$

$P(X < 15) = 1 - 0.05^{1.5} = \dots$

ב. מה הסיכוי שבמשך 200 ימים, זמן האיחור הממוצע יעלה על 4 דקות?

מתקיים $e^{-10\lambda} = 0.05$ לכן $\lambda \approx 0.3$

זמן האיחור הממוצע ביום הוא $\frac{1}{\lambda} \approx 3.3$ דקות ותוארת

הממוצע λ הוא 200 ימים הוא $\frac{1}{\lambda} \approx 3.3$

אסט"ת יתקן $\frac{3.3}{\sqrt{200}} \approx 0.23$

לפי משפט הגדול המרכזי בהסתברות הוא קירוב

$1 - \Phi\left(\frac{4 - 3.3}{0.23}\right) \approx 0$

ג. מה הסיכוי שב- 10 ימי נסיעה יהיו לכל היותר 2 איחורים הגדולים מ- 4 דקות?

ג'ום ג'וזג הס'כ'ו א'א'ז'ר ככ'פ פט'ל קק'ר'ז'ק
 $p \approx 0.05$, $n = 10$ ימ'ס פ'הס'ת'ק'ר'ז'ת ש'פ'ו
 אכ'פ פ'ו'ז'ר 2 א'ז'ז'ל'ס פט'ל קק'ר'ז'ק
 $(1-p)^{10} + \binom{10}{1} p (1-p)^9 + \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8$

ד. i. מהי תוחלת מספר הימים עד הפעם הראשונה שהרכבת תאחר ביותר מ- 10 דקות?

אכ'פ פ'ז'ט'ן, ג'ום ג'וזג פ'הס'ת'ק'ר'ז'ת ש'ט'ן פ'א'ז'ר
 'פ'פ' ג'ז'ס' N - 10 ז'ק'ת פט'ל 0.05, פ'הס'ת'ק'ר'ז'ת
 מס'פ פ'ימ'ס א'ז' ש'ז'ק'ת א'ז'ז'ר ככ'פ פט'ל
 $G(0.05)$ ז'ס'ן ז'ס'ת'ת $\frac{1}{0.05} = 20$

ii. מהי התוחלת מספר הימים עד הפעם החמישית שהרכבת תאחר ביותר מ- 10 דקות?

כ'ן מס'פ ז'ט'ן ז'יב'ה ש'פ'ט'ל מס'פ א'ז'
 ח'ז'ש'פ ש'ט'נ'ס $G(0.05)$ א'ז' ז'ס'ת'ק'ר'ז'ת (*)
 $MB(5, 0.05)$ פ'הס'ת'ק'ר'ז'ת פט'ל $5 \cdot \frac{1}{0.05} = 100$
 (*) ז'ס'ת'ק'ר'ז'ת ש'ט'נ'ס (10)

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

שאלה 3 (25 נקודות: סעיף א - 7 נקודות; סעיפים ב-ד: 6 נקודות)

התפלגות הציונים בקורס אלגברה לינארית היא נורמלית עם תוחלת 75 וסטיית תקן 7.
 התפלגות הציונים בקורס חדו"א היא נורמלית עם תוחלת 72 וסטיית תקן 10. מקדם המתאם
 בין 2 הציונים הוא 0.8. 100 סטודנטים לוקחים את שני הקורסים יחד. ציונים של סטודנטים
 שונים בלתי תלויים.

א. מה הסיכוי שלכל היותר 52 מתוך 100 הסטודנטים יקבלו ציון גבוה מ-80 באלגברה?

אזכר תלמי'ז בזכר, בהסתברות שפלא יקרה ציון
 גבוה מ-80 כפי שפלא

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{80-75}{7}\right)$$

תוחלת מספר התלמי'זים במקור'ם ציון גבוה
 יותר מ-80 כפי שפלא

$$\sigma = \sqrt{100p(1-p)}$$

 אפי משפט פלדוס פאורב',

בהסתברות במקור'ת כפי שפלא קירור

$$1 - \Phi\left(\frac{52-100p}{\sigma}\right)$$

בצורה: אפי שמורה, ניתן אהרע קירור אפי תקון
 כצבות.

ב. מה הסיכוי שסטודנט יקבל ציון גבוה יותר בחדו"א?

ההבדל בין חצו"א אלאהרה מתפלג נורמלית
 עם תוחלת 3- וסטיית תקן

$$\sigma = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 0.8 \cdot 7 \cdot 10}$$

בהסתברות במקור'ת כפי שפלא...

$$1 - \Phi\left(\frac{0-3}{\sigma}\right) = \dots$$

ג. תוחלת זמן הלימוד למבחן באלגברה של כל סטודנט היא 15 שעות וסטיית התקן היא 3 שעות. תוחלת זמן הלימוד למבחן בחדו"א של כל סטודנט היא 20 שעות וסטיית התקן היא 5 שעות. אין תלות בין זמני הלימוד לשני המקצועות ובין סטודנטים שונים.

מהן תוחלת ושונות זמן הלימוד המצטבר של 100 הסטודנטים?

תוחלת סכום שווה תמיד לסכום התוחלות
 ופיאסון $100 \cdot 15 + 100 \cdot 20 = 3500$

פונקציות סכימיות, הפונות שווה לסכום הפונות
 ופיאסון $100 \cdot 3^2 + 100 \cdot 5^2 = 3400$

ד. באוניברסיטה אחרת, נבחר מדגם של סטודנטים שלקח את שני הקורסים. הם נשאלו על הציון שלהם באלגברה (X) ובחדו"א (Y). הממוצע המדגמי של X הוא 80 ושל Y 70. סטיית התקן המדגמית של X היא 6 ושל Y 9. מקדם המתאם המדגמי הוא 0.7.

מהו הניבוי לציון בחדו"א של תלמיד מהסקר שקיבל 85 באלגברה.

בקיצור:

$$70 + (85 - 80) \cdot 0.7 \cdot \frac{9}{6} = \dots$$

שאלה 4 (28 נקודות: כל סעיף - 7 נקודות)

רועי מגיע למספרה. יהי X מספר האנשים שלפניו בתור לתספורת. בכל פעם שרועי מגיע למספרה, הערכים האפשריים של X הם 0, 1, 2 בהסתברויות 0.5, 0.375, 0.125 בהתאמה.

ביום 20 לקוחות לתספורת. הסיכוי שלקוח הוא אשה הוא 0.6.

א. מצאו את הפונקציה יוצרת מומנטים של X והסיקו ממנה את התוחלת והשונות של X .

$$E(e^{tx}) = 0.5 \cdot e^{t \cdot 0} + 0.375 \cdot e^{t \cdot 1} + 0.125 \cdot e^{t \cdot 2}$$

נציג את $E(e^{tx})$ ונקרא $0.375 \cdot e^t + 0.25 \cdot e^{2t}$.

נציג $t=0$ ונקרא 0.625 (נציג שיהיה $E(e^{tx})$ נציג 0 ונקרא $0.375 \cdot e^t + 0.5 \cdot e^{2t}$).

$V(X) = 0.875 - 0.625^2 = \dots$. $E(X^2) = 0.875$

ב. רועי מגיע למספרה פעם בחודש. מה הסיכוי שבמהלך שנה: בשבעה ביקורים לא יהיו לפניו אנשים בתור ו- 4 פעמים יהיה אדם אחד בתור לפניו?

$$\binom{12}{7} \cdot \binom{12-7}{4} \cdot 0.5^7 \cdot 0.375^4 \cdot 0.125^1$$

ג. תספורת נשים עולה 150 ש"ח, ותספורת גבר 50 ש"ח. מהן תוחלת וסטיית תקן הפדיון היומי מתספורות?

יבוי X - הפדיון היומי. $X = \sum_{i=1}^{20} X_i$ כאשר X_i הוא הפדיון

הפדיון מתספורת קצרה ו

$$E(X_i) = 0.6 \cdot 150 + 0.4 \cdot 50 = 110$$

$$V(X_i) = (0.6 \cdot 150^2 + 0.4 \cdot 50^2) - (0.6 \cdot 150 + 0.4 \cdot 50)^2 = 2400$$

תוחלת סכום תמ"ז שווה לסכום התוחלות

$$E(X) = \sum E(X_i) = 20 \cdot 110 = 2200$$

פונקציה לא תלויה, שונות הסכום שווה לסכום השונות

$$G = \sqrt{48000} \quad \text{אם} \quad 20 \cdot 2400 = 48000$$

ד. הסיכוי שתספורת גבר תימשך יותר מ-20 דקות הוא 0.25 והסיכוי שתספורת אשה תימשך יותר מ-20 דקות הוא 0.5. דני מגיע למספרה, והספר בדיוק מתחיל תספורת, ואין לקוחות נוספים במספרה. דני לא רואה אם הלקוח הוא גבר או אשה. מה הסיכוי שדני ימתין יותר מ-20 דקות?

$$0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.4$$