

מועד א', סמסטר ב', תשס"ח,
תאריך הבחינה: 14.8.08
משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
בית הספר לפיזיקה

הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

מספר מחברת: _____

תעודת זהות: _____

לשימוש הבודקים:

_____ 1

_____ 2

_____ 3

_____ 4

_____ סה"כ

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
לאתר של שלומי.

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
בית הספר לפיזיקה

מועד א', סמסטר ב', תשס"ח,
תאריך הבחינה: 14.8.08
משך הבחינה: 3 שעות

הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - בארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

בהצלחה !

שאלה 1 (28 נקודות - כל סעיף 7)

מספר הפעמים שסטודנט מושך כסף מכספומט הוא תהליך פואסון עם תוחלת של פעם בשבועיים. נלקח מדגם של 100 סטודנטים.

א. אחד מהסטודנטים במדגם הוציא כסף 4 פעמים ב-4 שבועות. מה הסיכוי שהוא הוציא כסף פעם בשבוע בכל אחד מארבעת השבועות?

מאורע A - הוציא 4 פעמים ק 4 שבועות.
מאורע B - הוציא פעם אחת ק 4 שבועות.
חישוק הסתברות מותנה:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5} \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5} \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5} \cdot 0.5}{e^{-2} \cdot \frac{2^4}{4!}}$$

$$= 4! \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

ב. מה הסיכוי שמתוך 100 סטודנטים שנבחרו באקראי, 40 לא יוציאו כסף בשבועיים הראשונים של ינואר והשאר יוציאו לפחות פעם אחת?

לגבי סטודנט קוצר בהסתברות שפלו לא יוציא כסף פלו פלו e^{-1} .

בהסתברות המקושת פלו

$$\binom{100}{40} \cdot (e^{-1})^{40} \cdot (1 - e^{-1})^{60}$$

ג. מה הסיכוי שממוצע מספר הפעמים ש-100 הסטודנטים הוציאו כסף בשבועיים כלשהם קטן

מ-1.3?

תוחלת מספר הפוזיות של כל סטודנט היא 1
 והשונות היא 1. אזי 100 סטודנטים סת"ת
 היתקן של הממוצע היא $\sqrt{\frac{1}{100}} = 0.1$.

אזי משפט הגדול המרכזי, ההסתברות המדויקת
 היא קרובה $\Phi\left(\frac{1.3-1}{0.1}\right) \approx 1$

ד. סטודנטים ממדעים מדויקים מוצאים 100 ש"ח בכל פעם ומשפטנים 200 ש"ח בכל פעם. במדגם
 40 משפטנים ו-20 סטודנטים ממדעים מדויקים (השאר מפקולטות אחרות). מהן תוחלת
 וסטיית התקן של סך סכום הכסף שהוצא ע"י 60 הסטודנטים הללו, במשך שבועיים?

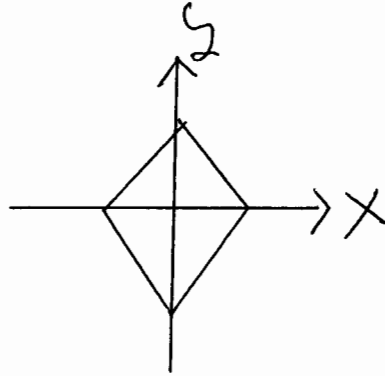
סטודנטים מוצאים ממוקם מוציא לשבועיים סכום
 שתוחלתו $100 \cdot 1 = 100$ ושונתו 100^2 .
 סטודנטים ממשפטים מוציא סכום שתוחלתו 200
 ושונתו 200^2 . תוחלת הסכום הכולל היא

$$20 \cdot 100 + 40 \cdot 200 = 10,000$$

הכולל א"י התלות שונת הסכום שווה לסכום
 השונות שהיא $20 \cdot 100^2 + 40 \cdot 200^2$. לכן סת"ת היתקן
 היא $\sqrt{20 \cdot 100^2 + 40 \cdot 200^2}$

שאלה 2 (24 נקודות – כל סעיף 6)

(X, Y) היא נקודה שנבחרת באקראי מהתחום $R = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.



א. מצאו צפיפויות שוליות של X ושל Y.

אלהי בולקצית בהסתברות בהסתברות:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

ב. מצאו תוחלת וחציון של X.

בולקצית הלבנות
 א $x+1$ עקור
 משקל' מטריה
 ! $1-x$ עקור

היא הפצת וס $-1 \leq x \leq 0$
 אלה וסן היא סוף
 עקור $1-x$ עקור $0 \leq x \leq 1$

הלבנות א ז $0 \leq x \leq 1$ ומחוס אתחוס כה היא אבס,
 היא $1+x$ עקור $0 \leq x \leq 1$

X משתנה חסר קנה צביות שהיא מטלית סגור
 פתקונה ס. אס. תוחלתו היא ס והחציון שלו
 היא ס.

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

ג. מצאו מקדם מתאם בין X ו-Y.

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}}$$

נסו להוכיח כי $\text{cov}(x, y) = 0$ ונסיק כי מתאם בין X ו-Y הוא 0.

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

$$E(x \cdot y) = \int_{-1}^0 \int_{-1-x}^{1+x} x \cdot y \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{-1+x}^{1-x} x \cdot y \, dy \, dx = \dots = 0$$

$$E(x) = E(y) = 0 \quad \text{כי } \mu = 0$$

אין מתאם בין X ו-Y כי $\text{cov}(x, y) = 0$ ונסיק כי מתאם בין X ו-Y הוא 0.

ד. האם X ו-Y תלויים או ב"ת?

הם תלויים כי $P(Y > 0.8 | X > 0.8) = 0 \neq P(Y > 0.8)$.

$$P(Y > 0.8 | X > 0.8) = 0 \neq P(Y > 0.8)$$

$$P(X > 0.8, Y > 0.8) = 0 \neq P(X > 0.8) \cdot P(Y > 0.8)$$

שאלה 3 (28 נקודות – כל סעיף 7)

שיכור הולך צעד אחד בכל דקה. הוא יצעד ימינה עם סיכוי 0.6 ושמאלה עם סיכוי 0.4. בחירת הכיוונים בכל צעד ב"ת. X_t הוא המיקום בזמן t , ונתון $X_0 = 5$.

א. מהי התפלגות המיקום שלו בזמן 2?

מספר הצעדים שמאל וימינה מתפלג $B(2, 0.6)$

$$P(X_2 = 7) = \binom{2}{2} \cdot 0.6^2, \quad P(X_2 = 5) = \binom{2}{1} \cdot 0.6 \cdot 0.4$$

$$P(X_2 = 3) = \binom{2}{2} \cdot 0.4^2$$

ב. מה הסיכוי שלאחר 10 צעדים הוא ימצא בנקודת ההתחלה?

צרום שמאל ואלק 5 צעדים ימינה ו 5 צעדים שמאלה ואלק
 5 צעדים ימינה ו 5 צעדים שמאלה ואלק

$$\binom{10}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^5$$

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

ג. יהי X מספר הפעמים שהוא צעד ימינה ב- 150 צעדים ו-Y מספר הפעמים שצעד שמאלה ב- 150 צעדים. מהן התוחלת והשונות של $D = X - Y$?

$$X - Y = X - (150 - X) = 2X - 150$$

$$E(2X - 150) = 2 \cdot E(X) - 150 = 2 \cdot 150 \cdot 0.6 - 150 = 30$$

$$V(2X - 150) = V(2X) = 2^2 \cdot V(X) = 4 \cdot 150 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 144$$

ד. מה הסיכוי שלאחר 100 צעדים הוא נמצא בטווח של 10 צעדים מנקודת ההתחלה?

בואו לזכור לעשות בין 45 ל 55 צעדים ימינה

$$\sum_{k=45}^{55} \binom{100}{k} \cdot 0.6^k \cdot 0.4^{100-k} = \dots$$

מספר הצעדים ימינה מתפלג $B(100, 0.6)$ ולכן בואו נעשה
 רמולת 60 וסטיות תקן $\sqrt{100 \cdot 0.6 \cdot 0.4} \approx 4.9$.

עם משהו בקיום המרכזי ההסתברות המקוטעת בואו

$$\Phi\left(\frac{55-60}{4.9}\right) - \Phi\left(\frac{45-60}{4.9}\right) \approx \Phi(-1.02) - \Phi(-3.06) = \dots$$

או אם שמירה תקון רציפות אס קקרוג

$$\Phi\left(\frac{55.5-60}{4.9}\right) - \Phi\left(\frac{44.5-60}{4.9}\right) = \dots$$

שאלה 4 (25 נקודות – סעיף ב:7; השאר - 6)

גובה נשים מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 165 ס"מ וגובה גברים נורמאלי עם תוחלת של 175 ס"מ. לשתי האוכלוסיות סטיית תקן של 5 ס"מ. נבחר זוג נשוי באקראי. יהי X גובה האישה ו- Y גובה הבעל. נניח שהמתאם בין X ו- Y הוא 0.

נגדיר $W = (X+Y)/2$ גובה ממוצע של בני הזוג ו- $V = Y - X$ ההפרש בגבהים.

א. מה הסיכוי שאישה תהיה גבוהה מבעלה?

מתפלג נורמאלי עם תוחלת 0 ושונות $5^2 + 5^2 = 50$

$$P(V < 0) = \Phi\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right) = \dots$$

ב. לאיזה אחוז מהזוגות גובה ממוצע שגבוה מ-173 ס"מ?

כאמור עם תוחלת $\frac{165+175}{2} = 170$ ושונות $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (5^2 + 5^2) = 12.5$

$$P(W > 173) = 1 - \Phi\left(\frac{173 - 170}{\sqrt{12.5}}\right) = \dots$$

ג. חשבו $P(W > 173 | V > 5)$.

$$\text{cov}(W, V) = \text{cov}\left(\frac{X+Y}{2}, Y-X\right) \stackrel{\text{כאן}}{=} \frac{1}{2}V(Y) - \frac{1}{2}V(X) = 0$$

אם השתנים W ו- V הם לתי מתנאים, כל משתנים נורמליים לתי מתנאים הם גם לתי תלויים. אם ההסתברות המשותפת צורה אהפכת לזאת היא מותנה על $(W > 173)$ ופוא צורה אהפכה מהצורה הקודמת.

ד. גובה סטודנטיות מתפלג נורמלי עם פרמטרים לא ידועים. במדגם של 100 סטודנטיות נמצא כי הגובה הממוצע שלהן הוא 167 ס"מ ו- $s = 5.1$ ס"מ.

i. מצאו א.נ.מ לתוחלת וסטיית התקן באוכלוסייה של גובה סטודנטיות.

א.נ.מ. איתחלת בטא הממוצע.
א.נ.מ. אסט"ת היקן בטא

$$\sqrt{\frac{5.1^2 \cdot 100}{99}}$$

ii. מהם האומדנים של האומדים הללו?

איתחלת 167

אסט"ת היקן

$$\sqrt{\frac{5.1^2 \cdot 100}{99}}$$