

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה להנדסה

23 פברואר 2004

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה להנדסת חשמל ואלקטרוניקה ול"משולבים" (0509.2801)

בחינת מועד א', סמסטר א' תשס"ד

מרב שומרני

ענה על כל השאלות.

השימוש מותר במחשבון, שלושה דפי עזר, ובלוחות סטטיסטיים בלבד;
יש לנמק ולהסביר את התשובות.
משך הבחינה שעתיים וחצי.

התחלה

שאלה מס' 1:

- א. מטילים קוביה 10 פעמים. נרקיס מהמר על "6" וחבצלת על "5". כל אחד מקבל שקל על כל פעם שהמספר שלו התקבל. מהן ההתפלגות, התוחלת והשונות של הרווח הכולל (של שני המשתתפים).
- ב. מציעים להם משחק אחר: הקוביה תוטל 10 פעמים עבור נרקיס, ואז עוד 10 פעמים עבור חבצלת. האם עדיף? (חשב התפלגות, תוחלת ושונות של הרווח הכולל) הסבר.
- ג. אם מטילים את הקוביה עד אשר יתקבלו כל הפאות, מהי תוחלת ושונות מספר ההטלות?
- ד. מטילים את הקוביה עד לקבלת הפאה "3" פעמיים (לאו דווקא ברצף). יהי W מספר ההטלות. כיצד מתפלג W ? חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של W וחשב בעזרתה תוחלת.
- ה. יהי X מספר ההטלות עד לקבלת הפאה "3" בפעם הראשונה. איך מתפלג X בהינתן ש- $W=n$?

שאלה מס' 2:

- נתונים $N+1$ כדים ממוספרים. בכד k יש k כדורים לבנים ו- $N-k$ כדורים אדומים: $k=0, \dots, N$. בוחרים באקראי כד ושולפים ממנו באקראי וללא החזרה n כדורים ($n \leq N$).
- יהי Y מספר הכדורים הלבנים שקבלנו, ויהי X מספר הכד שבחרנו.

א. מהי ההסתברות שנמצא בידינו y כדורים לבנים? רמז: העזר בזהות:

$$\sum_{k=y}^N \binom{k}{y} \cdot \binom{N-k}{n-y} = \binom{N+1}{n+1}$$

- ב. כיצד מתפלג Y בהינתן שבחרנו בכד x ?
- ג. חשב את תוחלת Y לפי נוסחת התוחלת השלמה (תוחלת מותנית).
- ד. בהינתן שקיבלנו y כדורים לבנים, מהי ההסתברות שבחרנו בכד x ?
- ה. האם X ו- Y בלתי תלויים? הוכח.
- ו. מהו סימן מקדם המתאם בין X ובין Y ? נמק.

שאלה מס' 3:

פונקצית הצפיפות המשותפת של המשתנים המקריים הרציפים X ו Y היא:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-x}e^{-2y} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- א. c הוא קבוע, מה ערכו?
- ב. מהן הצפיפויות השוליות של X ושל Y . כיצד הם מתפלגים?
- ג. האם X ו Y תלויים? הוכח.
- ד. חשב $P(X < Y)$.

שאלה מס' 4:

משקלו של דבר דפוס הוא משתנה מקרי מעריכי X בעל ממוצע של 100 גרם. מותר לשלוח בדואר ים חבילת דברי דפוס במשקל מקסימלי של 3 ק"ג.

- א. מהי ההסתברות שמשקל דבר דפוס יעלה על 110 גרם?
- ב. מהי ההסתברות שמשקל דבר דפוס יהיה 120 גרם? מהי השונות של המשקל?
- ג. מהי **בקרוב** ההסתברות שתצליח לשלוח את כל 36 דברי הדפוס שברשותך בדואר ים? מה הנחת?
- ד. מהי **בקרוב** ההסתברות שלפחות 9 מתוך 36 דברי הדפוס שלך ישקלו למעלה מ- 110 גרם? מה הנחת? רשום ביטוי עבור ההסתברות המדויקת.