

מבחן מועד א' הסתברות להנדסת חשמל

19.2.2007

פרופ' לויתן תלמה

מותר (אך אין צורך) לענות על כל השאלות. שימו לב שסך כל הנקודות הוא 110.
כל התשובות חייבות להינתן על גבי טופס השאלון עצמו, מחברות הטיוטא עצמן לא תיבדקנה.
השימוש בדפי נוסחאות ובמחשבון אישי מותר.
משך הבחינה 3 שעות. לא תינתן הארכה.

בהצלחה!!!

שאלה 1 (20 נקודות)

תקלה טכנית אירעה באחד (בלבד) מ-N אתרים. מניחים אפריורית (כלומר מראש) סיכוי שווה. מתכננים לבצע בדיקה ראשונית באתרים אלו (ואם אלו לא יעלו דבר לשלוח צוותים לבדיקות מעמיקות יותר). נסמן:

α_i - ההסתברות שבדיקה ראשונית לא תגלה שהתקלה למעשה התרחשה באתר ה- i , $i=1,2,\dots,N$

א. בדיקה ראשונית באתר 1 לא העלתה דבר. חשבו את ההסתברויות:

שהתקלה היא באתר 1

$$P(I=1 | \text{all tests failed}) = \frac{P(I=1) \cdot P(\text{all tests failed} | I=1)}{P(\text{all tests failed})} = \frac{\frac{1}{N} \alpha_1}{\frac{1}{N} \alpha_1 + 1 \cdot \frac{1}{N} + \dots + 1 \cdot \frac{1}{N}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + N - 1}$$

שהתקלה היא באתר $k \neq 1$

$$P(I=k | \text{test failed at } k, \text{ others passed}) = \frac{\frac{1}{N} \cdot 1}{\frac{1}{N} \alpha_1 + 1 \cdot \frac{1}{N} + \dots + 1 \cdot \frac{1}{N}} = \frac{1}{\alpha_1 + N - 1}$$

ב. השווה הסתברויות (אפוסטריוריות) אלו להסתברויות האפריוריות של מאורעות אלו. הסבירו.

$\frac{1}{N} > \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + (N-1)}$ או $\frac{1}{N} < \frac{1}{\alpha_1 + (N-1)}$
 או $\frac{1}{N} > \frac{1}{\alpha_1 + (N-1)}$ או $\frac{1}{N} < \frac{1}{\alpha_1 + (N-1)}$
 ג. עתה הניחו שיש למעשה אינסוף אתרי תקלה אפשריים 1,2,... ושההסתברות האפריורית α_i היא פרופורציונלית ל- $(1/3)^i$. כיצד יש לחשב מחדש את ההסתברויות האפוסטריוריות?

האפוסטריוריות? $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$
 הלא α_i מקום i באתר i $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}$ ואת $\frac{1}{3}$ הותיר שיהיה מקום i באתר i .
 היתפלס $\frac{1}{3}$ בהסתברות $\frac{1}{3}$ היתפלס $\frac{1}{3}$ בהסתברות $\frac{1}{3}$ היתפלס $\frac{1}{3}$ בהסתברות $\frac{1}{3}$ היתפלס $\frac{1}{3}$ בהסתברות $\frac{1}{3}$.

לאחר משה:

$$P(I | \begin{matrix} \text{קצת} \\ \text{ל} \\ \text{היטה} \end{matrix}) = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$P(k | \begin{matrix} \text{קצת} \\ \text{ל} \\ \text{היטה} \end{matrix}) = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}$$

שאלה 2 (35 נקודות)

ממחון שבו 8 רכיבים מסוג A ו-2 רכיבים מסוג B שולפים רכיב אחר רכיב (ללא החזרה כמובן).

יהיו: X - מספר הרכיבים עד (כולל) שהתקבל לראשונה רכיב מסוג B,

Y - מספר הרכיבים עד (כולל) שהתקבל בפעם השנייה רכיב מסוג B,

א. חשבו $P(X=3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{45}$

ובאופן כללי $P(X=k) = \frac{1 \cdot (10-k)}{\binom{10}{2}} = \frac{10-k}{45}$

(הפיתרון הבאון קמקם ה- k והפיתרון הפתוי יטעם עביות קכס אכזר)

ב. חשבו $P(X=2, Y=4) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$ יש מ'קמ'ם אכס'ם עכ'ם פכ'ם.

ובאופן כללי $P(X=k, Y=n) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$ עכ'ר $1 \leq n < k \leq 10$

שוק כה אכזר מ $\binom{10}{2}$ טכ'ת הפ'קמ'ם הפכ'ם.

ג. מצאו את ההתפלגות (המותרנית) של Y | (X=k)

המ'קום ע' הפ'י מתככ' אכז'ר ע'ם פנ' $10-k$ מ'קמ'ם אכ'ם.

עכ'ר $1 \leq n < k \leq 10$ $P(Y=n | X=k) = \frac{\frac{1}{45}}{10-k}$

מהו הניבוי הטוב ביותר ל-Y בהינתן X=k?

$= \frac{1}{10-k}$

ק'הית'ן $X=k$ הית'ח'ת'ת' הית'ח'ת'ת' של Y פכ'ם $\frac{k+1+10}{2} = \frac{k+11}{2}$

ד. מצאו את ההתפלגות (המותנית) של $X|Y=n$.

הייתבטל את המותנה בטל אוליבה על פני $1, \dots, 9$

$$P(X=k|Y=n) = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{n-1}{45}} = \frac{1}{n-1}$$

מהו הניבוי הטוב ביותר ל- X בהינתן $Y=n$?

$$E(X|Y=n) = \frac{1+(n-1)}{2} = \frac{n}{2}$$

ה. נתחו (ללא חישובים) את הסימן של מקדם המתאם בין Y, X .

ככל ש X עולה עולה התוחלת המותנה של Y .
לכן נרצה למקדם מתאם חי'ול'.

ו. חשבו את הסתברות המאורעות הבאים:

$$P(Y-X=1) = \frac{2,9}{10,9} = \frac{2}{10} \quad (\text{שכנים})$$

$$P(Y-X=9) = \frac{2}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45} \quad (\text{קצוות})$$

ז. מצאו שכיח, חציון ותוחלת של אחד המשתנים. מה לגבי המשתנה האחר?

$$P(X=k) = \frac{10-k}{45} \quad 1 \leq k \leq 9$$

אין השכיח בטל 1

$$\frac{9}{45} + \frac{8}{45} < \frac{1}{2} \quad \text{מתקיים}$$

$$\frac{9}{45} + \frac{8}{45} + \frac{7}{45} > \frac{1}{2} \quad \text{אין}$$

החציון הטל 3, התוחלת הטל:

$$\sum_{k=1}^9 \frac{(10-k) \cdot k}{45}$$

וזה עונה את השאלה

התבטל את המרחק של הפני מהמסל שזה עדייבטל
המרחק של המסלון מהתחלה, מסלן השכיח של הפני
הטל 9, החציון של הטל 7

שאלה 3 (40 נקודות)

נאמר ש- X מתפלג על פי חי-בריבוע עם פרמטר n , סימון $X \sim \chi_n^2$, אם פונקציית הצפיפות

של X היא: $f(x) = c_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ עבור $x \geq 0$.

א. Z משתנה נורמלי סטנדרטי. הוכיחו ש- $X = Z^2$ מתפלג χ_1^2 (התפלגות חי-בריבוע עם $n=1$).

נתון אף הציביות של Z וכל הנוסחאות של הסיקור
 ציביות של משתנה שהטל טיכונותיה של אותה.

$$f_X(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f_Z(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

ב. הסיקו מכך את הקבוע c_1 עבור התפלגות χ_1^2 וכן את התוחלת של התפלגות χ_1^2 .

קלטו שהקלט הטל $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$E(X) = E(Z^2) = \text{Var}(Z) + E^2(Z) = \text{Var}(Z) = 1$$

ג. מהי הצפיפות מהי התוחלת ומהי השונות של התפלגות χ_2^2 ?

הציביות הטל $c_2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$. טל הציביות הטל והפלא של ציביות ציבור
 וסאת? קלטו אף הציביות הטל $\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ מהיכית $\frac{1}{2} = 4$

ד. מצאו פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה χ_n^2 .

$$M_n(t) = c_n \int_0^\infty e^{tx} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{c_n}{(1-2t)^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty [x(1-2t)]^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}(1-2t)} dx =$$

$$= \frac{1}{(1-2t)} \cdot \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty c_n \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

(הציבור הטל $y = (1-2t)x$, $dy = (1-2t)dx$)

הוכיחו תכונת חיבוריות של המשפחה.

מתקיים $M_h(z) \cdot M_m(z) = M_{h+m}(z)$.
 למה? תלנו"ס דגלי ביטוי h ו m הוא משנה דגלי ביטוי $h+m$.
 ה. הסיקו (או חשבו בדרך כלשהי): תוחלת ושונות של משתנה χ_1^2 .

סכום n של משתנים דגלי תלנו"ס המשפחה זו מתפלג $\exp(-\frac{1}{2})$.
 הסיקו: תוחלת ושונות של משתנה χ_n^2 .
 $\frac{1}{2} / 2 = 1$ זהם יש תוחלת $\frac{1}{4} / 2 = \frac{1}{2}$ ושונות $\frac{1}{4}$.
 n בעלים התוחלת והשונות של משנה עם ביטוי n .

ד. $W \sim \chi_1^2$, הציעו דרך לחשב:

$$P[W \leq 1] = P(-1 < Z < 1) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$Y \sim \chi_{100}^2$ הציעו דרך לחשב:

Z הוא סכום $n=100$ משתנים דגלי תלנו"ס שולל התפלגות שלם אחז מהם יש תוחלת 1 ושונות 2.
 הפיכתיות היא קקי חזי:

$$\Phi\left(\frac{111 - 100 \cdot 1}{\sqrt{100 \cdot 2}}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{111 - 100 \cdot 1}{\sqrt{100 \cdot 2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

שאלה 4 (15 נקודות)

זרם הקניות של מוצר יוקרה מסוים באתר אינטרנט בינלאומי מתפלג פואסוני עם ממוצע של 4 קניות ביום. בשלב זה יש מלאי של 10 יחידות. נסמן:
 X_k - משך הזמן בשעות עד לקניה מספר k .

א. כיצד מתפלג משך הזמן עד גמר המלאי? מהי התוחלת ומהי השונות?

$$E(X_0) = 6 \cdot 10, \quad X_0 \sim \text{Gamma}\left(10, \frac{1}{6}\right)$$

$$\text{Var}(X_0) = 6^2 \cdot 10$$

ב. מצאו פונקציית צפיפות משותפת של (X_1, X_2)

$$f_{X_1, X_2}(s, t) = f_{X_1}(s) \cdot f_{X_2|X_1=s}(t) = \frac{\lambda^s e^{-\lambda}}{s!} \cdot \frac{\lambda^{t-s} e^{-\lambda}}{(t-s)!} = \lambda^t e^{-\lambda t} = \lambda^2 e^{-\lambda t} \quad 0 < s < t$$

ג. חשבו מקדם מתאם בין X_1, X_2 .

$$E(X_1) = \frac{1}{4} \quad E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$E(X_2|X_1) = X_1 + \frac{1}{4}$$

$$E(X_1 \cdot X_2) = E\left(X_1 \left(X_1 + \frac{1}{4}\right)\right) = E(X_1^2) + \frac{1}{4} \cdot E(X_1) =$$

$$= V(X_1) + E^2(X_1) + \frac{1}{4} \cdot E(X_1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2)}{\sqrt{V(X_1) \cdot V(X_2)}} = \frac{\frac{3}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4^2} \cdot \frac{2}{4^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$