

## פתרון הבחינה של פרופ' תלמה לויתן מ 15.7.02

### פתרון שאלה 1

**א.**  $P(k=2) = 0.9 - 0.15 = 0.75$  – הסכוי שיענה על שאלה מספר 1 פחות הסכוי שיענה רק על שאלה מספר 1.

$$P(k=1) = P(k \geq 1) - P(k=2) = (0.9 + 0.8 - 0.75) - 0.75 = 0.2$$

$$P(k=0) = 1 - P(k=2) - P(k=1) = 1 - 0.75 - 0.2 = 0.05$$

$$E(X) = 0.05 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 + 0.75 \cdot 2 = 1.7$$

**ב.** או ללא הסתמכות על חישוב ההתפלגות:  $0.9 + 0.8 = 1.7$  לפי סכום האינדיקטורים לשאלות.

**ג.** לא ניתן. אילו היתה אי תלות אז השונות היתה שווה לסכום השונות, אך כאן האינדיקטורים מקבלים הסתברויות 0.9 ו 0.8 והיתוך המאורעות אינו מקבל הסתברות  $0.9 \cdot 0.8$ . (הוא מקבל הסתברות 0.75).  $\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1, X_2) - E(X_1)E(X_2) \neq 0$ . והשונות אינה שווה לסכום השונות.

### פתרון שאלה 2

**א.** כל בוגר קולט את כובעו בסכוי  $\frac{1}{4}$ . תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות  $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ .

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \quad P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \stackrel{\text{also}}{=} \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

**ב.** שלו אז ב 2 מתוך 3! סידורים אפשריים של היתר, אף אחד לא קולט את שלו. **ג.** ארבעת המאורעות שרק אחד מסוים קלט את שלו הם זרים לכן ההסתברות שווה ל 4 פעמים

$$\text{ההסתברות שיוסי בלבד קלט את שלו} : 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6}$$

### פתרון שאלה 3

**א.** הסכויים לגבי השלישי הם כמו הסכויים לגבי כל אחר כולל הראשון  $\frac{35}{50}$ .  $F$  – הראשון שרוף,  $T$  – השלישי שרוף,  $AL$  – לפחות אחד שרוף,  $EX$  – בדיוק אחד שרוף

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49}}{\frac{35}{50}} = \frac{34}{49}$$

$$P(T|AL) = \frac{\frac{35}{50}}{1 - P(X=0)} = \frac{\frac{35}{50}}{1 - \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} \cdot \frac{13}{48}} \quad P(T|EX) = \frac{1}{3}$$

**ג.** ולגבי החבר אותם סכויים אם אין מידע לגבי.  $\binom{3}{2} \cdot \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} \cdot \frac{15}{48}$

$$P(A \cap B) = \binom{3}{2} \cdot \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} \cdot \frac{15}{48} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{33}{47} \cdot \frac{32}{49} \cdot \frac{14}{46} \neq P(A)P(B) \Rightarrow \text{תלויים}$$

#### פתרון שאלה 4

$$E(X) = \frac{1}{1/8} = 8 \quad X \sim G\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{ב.} \quad E(X) = \frac{1+8}{2} = 4.5 \quad X \sim U(1,8) \quad \text{א.}$$

ג. שונות קטנה יותר במקרה האחד. במקרה הגיאומטרי מתקבלת תוחלת גדולה יותר ולכל אחד מ-8 המקרים שקרובים ביותר לתוחלת יש הסתברות קטנה יותר מאשר כל אחד מהמקרים באחד, כאשר שונות היא ממוצע רבועי הסטייה מהתוחלת.

#### פתרון שאלה 5

$$\frac{(1-0.6) \cdot 0.9}{(1-0.6) \cdot 0.9 + 0.6 \cdot (1-0.85)} \quad \text{ב.} \quad (1-0.6) \cdot 0.9 + 0.6 \cdot (1-0.85) \quad \text{א.}$$

$$\frac{(1-0.6) \cdot 0.9 \cdot 0.9}{(1-0.6) \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot (1-0.85) \cdot (1-0.85)} \quad \text{ג.}$$

#### פתרון שאלה 6

$$\lambda = \frac{3 \cdot (1+2+3)}{12} = 1.5 \quad \text{כאשר} \quad P(\lambda) \quad \text{היא ההתפלגות לכן פואסוני הוא פואסונים}$$

$$P(Z=2) = \frac{e^{-1.5} 1.5^2}{2!}$$

הנחנו אי תלות בין הרכיבים וכמו כן הנחנו הנחה שאינה כל כך מדויקת

שבמשך החודש לא משתנה עוצמת הקילקולים (הרי הן קצת מתישנות).

$$X \sim \exp(\mu) \quad \text{כאשר} \quad \mu = 1.5 \quad \text{לכן} \quad E(X) = 2/3, \quad \text{ב.} \quad \text{Var}(X) = 1/1.5^2$$

לסכום מעריכיים יש תוחלת ששווה לסכום התוחלות ואם הם גם בלתי תלויים אז יש להם שונות ששווה

$$E(Y) = \frac{2}{1.5} \quad \text{לסכום השוניות:} \quad \text{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{1.5^2}$$

ג. ההסתברות שמשתנה  $\exp(1.5)$  יקבל ערך גדול מ-2 היא  $e^{-2 \cdot 1.5}$ .

ד. אפשר לפי התפלגות גמא אך נפתור אחרת: מספר התקלות בחצי שנה מתפלג  $P(6 \cdot 1.5)$ .

$$\text{צריך שבחצי שנה יהיו אפס או אחת תקלות:} \quad e^{-9} + 9e^{-9}$$

#### פתרון שאלה 7

$$P(X=2, Y=1) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{9}{3}} \quad \text{א.}$$

ב.  $X$  מתפלג הפרגאומטרית עם פרמטרים 3 נסיונות מתוך 4 מתאימים מתוך 9:  $E(X) = 3 \cdot \frac{4}{9}$ .

ג. ככל שיש יותר אדומים קטן הסכוי להוצאת כחול בכל הוצאה, לכן יש מתאם שלילי.

ד. כל אחד משניים שאינם כחולים הוא אדום בסכוי  $\frac{4}{4+2}$ . לכן התוחלת המותנה היא  $2 \cdot \frac{4}{2+4}$ .

**פתרון שאלה 8**

**א.**  $e^{-110/100}$  . השונות היא  $100^2$  .

**ב.** הנחת אי תלות . הסכום מתפלג בקירוב נורמלית , בעל תוחלת  $2,100$  וסטיית תקן  $\sqrt{21 \cdot 100^2}$

**ג.** תוחלת מספר הכבדים מ  $100$  היא  $21 \cdot e^{-110/100}$  . השונות של מספר הכבדים מ  $100$  היא  $(21e^{-110/100}(1 - e^{-110/100}))$  (לכל אינדיקטור יש הסתברות  $e^{-110/100}$  ויש  $21$  כאלה) .

לפי קירוב נורמלי שבו משתמשים בתיקון רציפות :  $p \cong 1 - \phi\left(\frac{3.5 - 21e^{-110/100}}{\sqrt{21e^{-110/100}(1 - e^{-110/100})}}\right)$

---

שלומי