

מספר ת"ז: _____ מספר נבחן: _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשס"ט, מועד א' 04/02/09

אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.
משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל : 105 נקודות.
2. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
3. לרשותכם 3 שעות.
4. את כל החישובים יש לבצע במחברת.
5. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במחברת.
6. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: _____ מספר תשובות שגויות: _____

ציון: _____

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
לאתר של שלומי.

שאלה 1

כאשר מסובבים סביבון משולש מתקבלת אחת התוצאות 1,2,3. נתונים שני סביבונים כנ"ל, כאשר יש להם תכונה מיוחדת: כאשר מסובבים את שניהם ההסתברות לכל אירוע פרופורציונית למכפלה של שתי התוצאות. כך, הסיכוי לקבל 2 בסביבון ראשון ו-3 בשני, זהה לקבלת 3 בסביבון ראשון ו-2 בשני, וערך זה הוא פי אחד וחצי מהסיכוי לקבל 1 ו-2. מה הסיכוי לקבל מכפלה זוגית?

(א) $\cdot \frac{1}{3}$

(ב) $\cdot \frac{5}{9}$

(ג) $\cdot \frac{1}{2}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3}$$

שאלה 2

במשחק מוטלת קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה לכל היותר 4. סכום הזכייה הוא התוצאה האחרונה שהתקבלה. מהי שונות הזכייה?

(א) 2

(ב) 1.25

(ג) 2.25

(ד) אף אחד מהנ"ל.

מתקבלת תוצאה מתפלגת $U(1,4)$
 סכום הזכייה $\frac{(4-1+1)^2-1}{12}$

שאלה 3

יעל הולכת לכספומט. לפנייה ייתכן שיהיה עוד לקוח אחד, ובסיכוי שווה יתכן שלא יהיה אף אחד. הזמן שלוקח לאיש שלפניה להוציא כסף (אם הוא ישנו), מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר λ . זמן ההמתנה בתור של יעל מתפלג:

(א) בינומית.

(ב) גיאומטרית.

(ג) פואסונית.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

התפלגות זמן הפחיתת הפול רציפה.
 כל התפלגויות הפואסונית הן רציפות.

שאלה 4

משתנה מקרי X מקבל רק שני ערכים בהסתברות חיובית. ידוע כי $E[X]=0$, $P(X=-3) > 0$

וכן $Var[X]=4.5$. הערך השני של X מקבל בהסתברות חיובית הוא:

(א) $\frac{3}{2}$ כפי שאתם רואים את זה
 (ב) $\frac{4}{3}$ כפי שאתם רואים את זה
 (ג) $\frac{2}{3}$ כפי שאתם רואים את זה
 (ד) אף אחד מהנ"ל.

$V(X) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0^2 = 4.5$

שאלה 5

היו X_1, X_2, \dots, X_{n+1} משתנים מקריים, בלתי תלויים, שווי התפלגות, כך שלכל $i=1, 2, \dots, n+1$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$$

נגדיר את המשתנים הבאים

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X_n = X_{n+1} = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

התוחלת של $\frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + \dots + nY_n}{n(n+1)}$ היא:

(א) $\frac{1}{4}$ כפי שאתם רואים את זה
 (ב) $\frac{1}{8}$ כפי שאתם רואים את זה

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{(1+n)h}{2} \cdot \frac{1}{4}$

(ג) תלוייה ב- n
 (ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 6

בהמשך לשאלה 5, מחפשים חסם למאורע: $\left| \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} - \frac{1}{4} \right| > 0.001$, תוך שימוש באי

שוויון צ'ביצ'ב. מהו ה- n המינימלי, עבורו מתקבל החסם הבא:

$$V(S) = \sum V(Y_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(Y_i, Y_j)$$

$$= h \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 2(n-1) \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \right) \cdot P\left(\left| \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} - \frac{1}{4} \right| > 0.001 \right) < 0.001$$

$\sim \frac{5}{16} h$
 187.5×10^6

(א) $\text{cov}(e, e)$

$$\frac{\frac{5}{16}h}{h^2 \cdot 0.001^2} < 0.001$$

זרע נכ עי

(ב) 250×10^6

(ג) 187×10^3

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 7

נתונים שלושה מאורעות A, B, C בעלי הסתברויות 0.5, 0.25 ו-0.2 בהתאמה. יהי מספר המאורעות המתרחשים מבין השלושה. חשב את $E[N]$, בהינתן כי $C \subset B \subset A$.

(א) 0.95 סכום התוחלות & האונקציות: $0.5 + 0.25 + 0.2$

(ב) 1.25

(ג) 0.85

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

בהמשך לשאלה 7, חשב את $Var[N]$.

$$0.2 \cdot 3^2 + 0.05 \cdot 2^2 + 0.25 \cdot 1^2 - 0.95^2$$

(א) 1.5

(ב) 1.25

(ג) 1.3475

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 9

בניח כי X_1, \dots, X_{10} הם משתנים מקריים בלתי תלויים, המתפלגים כל אחד באופן אחיד בקטע $[0, 1]$.

הערך את $P(X_1 + \dots + X_{10} < 7)$ באמצעות אי שוויון מרקוב.

$$P(X_1 + \dots + X_{10} \geq 7) \leq \frac{E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10})}{7} = \frac{10 \cdot 0.5}{7} = \frac{5}{7}$$

(א) לכל היותר $\frac{5}{7}$

(ב) לכל הפחות $\frac{2}{7}$

(ג) לכל הפחות $\frac{5}{7}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 10

משקל ספר מתפלג בקירוב נורמלי עם ממוצע של 0.75 ק"ג וסטיית תקן של 0.15 ק"ג. מותר לשלוח בדואר, חבילות ספרים במשקל כולל מקסימלי של 5 ק"ג. ההסתברות שניתן לשלוח 8 ספרים (ב"ח)

בחבילה היא:

$$G = \sqrt{8 \cdot 0.15^2} = \sqrt{8 \cdot 0.0225} = \sqrt{0.18}$$

(א) $\phi(2.36)$.

$$1 - \phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.18}}\right)$$

עקב N

(ב) $1 - \phi(2.36)$

(ג) $\phi(0.625)$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 11

בהמשך לשאלה 10, רוצים לשנות את המגבלה של "משקל מקסימלי לחבילה הינו 5 ק"ג" כך שניתן יהיה לשלוח חבילה של 10 ספרים בסיכוי 0.95 לפחות. מגבלת המשקל המינימלית (ביחידות ק"ג שלמות)

שתבטיח זאת היא:

$$G = \sqrt{10 \cdot 0.15 \cdot 0.15} = \sqrt{0.225}$$

(א) 9 ק"ג.

(ב) 7 ק"ג.

(ג) 10 ק"ג.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 12

A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים. I_A ו- I_B הם האינדיקטורים של A ו- B בהתאמה. הטענה

נכונה רק כאשר $P(A)P(B) > 0$.
 נכונה רק כאשר $P(A)P(B) > 0$.

$$Var(I_A \cdot I_B) = Var(I_A)Var(I_B)$$

(א) נכונה כאשר $P(A)P(B) > 0$.

(ב) תמיד איננה נכונה.

(ג) נכונה כאשר $0 < P(A) < 1$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

$$V(I_A I_B) = P(A) \cdot P(B) - (P(A)P(B))^2$$

$$= P(A) \cdot P(B) (1 - P(A) \cdot P(B))$$

$$V(I_A) \cdot V(I_B) = (P(A) - (P(A))^2) (P(B) - (P(B))^2) =$$

$$= P(A) \cdot P(B) [(1 - P(A))(1 - P(B))]$$

שאלה 13

תהא פונקציית צפיפות משותפת של המשתנה הדו $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}/3 & x > 0, 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ממדי (X, Y) . ההסתברות $P(Y > \frac{3}{4} | X > 1)$ היא:

א) $\frac{1}{4}$
 ב) $\frac{5}{8}$
 ג) $\frac{3}{4}$ (ג)
 ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 14

בהמשך לשאלה 13, מקדם המתאם בין X ל- Y הוא:

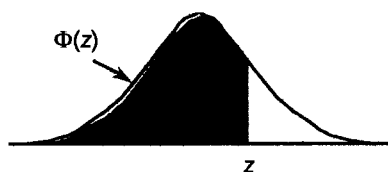
א) חיובי אך לא 1.
 ב) 0 (ב)
 ג) 1.
 ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 15

בהמשך לשאלה 13. התוחלת של X היא:

א) שווה לתוחלת של Y .
 ב) קטנה מהתוחלת של Y . (ב)
 ג) קטנה מ-1.
 ד) אף אחד מהנ"ל.

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995